Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”
Міністерство освіти і науки України

Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Потапенко Олексій Юрійович

УДК 517.98+517.954

ДИСЕРТАЦІЯ

Крайові задачі на нескінченновимірних многовидах

01.01.01 — математичний аналіз

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата
фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело
__________________ О. Ю. Потапенко

Науковий керівник: Богданський Юрій Вікторович,
професор, доктор фізико-математичних наук

Київ – 2019

АНОТАЦІЯ

Потапенко О. Ю. Крайові задачі на нескінченновимірних многовидах. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз. — Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, Київ, 2019.

Робота виконана на кафедрі математичних методів системного аналізу Інституту прикладного системного аналізу Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського” в рамках державної науково-дослідної роботи “Застосування математичних методів в дослідженні інтегральних характеристик детермінованих та стохастичних складних систем”, номер державної реєстрації 0118U003669.

Дисертація присвячена побудові і дослідженню крайових задач в області на нескінченновимірних многовидах і просторах. Дослідження крайових задач з нескінченновимірним аргументом є однією з найважливіших задач функціонального аналізу. Одним з предметів дослідження функціонального аналізу є нескінченновимірні топологічні векторні простори, їх відображення та пов’язані об’єкти. Історично функціональний аналіз завдячує своїм виникненням як напрямку дослідженню перетворення Фур’є, диференціальних і інтегральних рівнянь. Починаючи з другої половини XX століття функціональний аналіз поповнився цілою низкою розділів, отриманих шляхом узагальнення класичної скінченновимірної теорії на нескінченновимірний випадок, що ілюструє актуальність внутрішнього розвитку теорії функціонального аналізу.

Основна частина дисертації складається зі вступу, чотирьох розділів, розбитих на підрозділи, висновків, списку використаної літератури та додатку зі списком опублікованих праць здобувача за темою дисертації

і наукових семінарів та конференцій, на яких доповідались отримані результати.

У вступі до дисертації обґрунтовано вибір теми дисертаційної роботи, подано короткий історичний огляд стану проблеми, сформульовано мету та завдання дослідження, висвітлено наукову новизну, а також наведено інформацію щодо апробації результатів та публікацій за темою дисертації.

Розділ 1 присвячено огляду робіт, що мають відношення до теми дисертаційного дослідження. Наведено огляд класичних результатів ріманової геометрії, що стосуються предмету дослідження: означення ріманового многовиду, існування метричного тензора, ріманова зв'язність, зв'язність Леві–Чивіти і повнота ріманового многовиду. Проведено огляд ряду сучасних робіт з ріманової геометрії, присвячених еліптичним рівнянням на ріманових многовидах. Розглянуто диференційовність мір за Фоміним та за Скороходом уздовж напрямків, диференційовність уздовж векторних полів, визначено зв'язок між ними.

У розділі 2 розглянуто нескінченновимірні ріманові многовиди. На зв'язному рімановому многовиді розглянуто конструкцію внутрішньої метрики — інфімуму довжин кусково гладких кривих, що поєднують відповідні точки. Показано, що топологія зв'язного ріманового многовиду, породжена внутрішньою метрикою, не слабша за вихідну топологію.

Запропонована умова рівномірності атласу ріманового многовиду, виконання якої дозволяє довести метричну повноту многовиду за внутрішньою метрикою. Доведено, що при виконанні певних додаткових умов, які, зокрема, виконуються при умові рівномірності атласу, внутрішня метрика є узгодженою з вихідною топологією многовиду.

В якості нетривіальних прикладів показано, що при виконанні певних умов межа області та поверхня сумісного рівня функцій в гільбертовому просторі є рімановими многовидами з рівномірними атласами.

У розділі 3 запропоновано L^2-версію лапласіана за мірою на (нескінченновимірному) рімановому многовиді. Доведено коректність задачі Діріхле для рівнянь з уведеним лапласіаном в області рімановa многовиду певного класу. Під коректністю задачі розуміється існування та єдиність розв'язку задачі.

Наведено модельний приклад рівномірного ріманового многовиду, для якого реалізуються всі умови, використанні при доведенні коректності наведеної задачі Діріхле.

Вводяться до розгляду простори L^p_v векторних полів з використанням конструкції, подібної до інтегровності за Бохнером. Доведено, що вимірне векторне поле лежить в L^p_v в тому і тільки тому разі коли його норма лежить в функціональному просторі L^p. Доведена повнота просторів L^p_v. Повнота простору L^2_v використовується зокрема при побудові лапласіана.

У розділі 4 досліджується дифеоморфне відображення між нескінченновимірними рімановими многовидами з рівномірними атласами як спосіб розширення класу коректних крайових задач.

Наведено два приклади використання методу дифеоморфізмів. В першому прикладі доведена коректність певного класу крайових задач на області гільбертового простору. В другому — отримана крайова задача, асоційована зі стереографічною проекцією сфери, таким чином, проілюстрована робота методу дифеоморфізмів на ріманових многовидах, які не є областями в гільбертовому просторі.

Додаток містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

Основні результати дисертаційної роботи, які визначають її наукову новизну та виносяться на захист, наступні:

- Побудовано нетривіальні приклади певного класу нескінченновимірних ріманових многовидів, наділених рівномірним атласом. Досліджено зв'язок внутрішньої метрики з вихідною топологією.

- Запропоновано L^2-версію лапласіана за мірою на (нескінченновимірному) рімановому многовиді.

– З'ясовано технічні умови на ріманів многовид, за яких стає можливим встановити коректність (існування та єдиність розв'язку) певного класу задач Діріхле для рівнянь з лапласіаном за мірою.

– Наведено нетривіальний модельний приклад ріманового многовиду, що задовольняє усі технічні умови, використані при побудові лапласіана та доведенні коректності задач Діріхле.

– Запропоновано метод дифеоморфізмів як спосіб розширення класу коректних крайових задач.

За результатами дисертаційної роботи опубліковано п'ять наукових статей у фахових виданнях (дві з яких опубліковано у журналі, який індексується наукометричними базами Scopus і Web of Science) та три роботи у матеріалах наукових конференцій, дві з яких є міжнародними.

Ключові слова: гільбертів простір, ріманів многовид, борелівська міра, диференціювання мір, оператор Лапласа, задача Діріхле.

ABSTRACT

Potapenko O. Yu. Boundary value problems in infinite-dimensional manifolds. — Qualifying scientific work on the right of manuscript.

Candidate's thesis on Physics and Mathematics, speciality 01.01.01 — Mathematical Analysis. — National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, 2019.

The work is prepared at the Department of Mathematical Methods of Systems Analysis of Institute for applied system analysis of National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute" in the scope of national scientifical research program "Usage of mathematical methods in researching integral characteristics of determined and stochastic complex systems", national registration number 0118U003669.

The thesis deals with constructing and studying boundary value problems in domains in infinite-dimensional spaces and manifolds. Research of boundary value problems with infinite-dimensional argument is one of the most important tasks of functional analysis. One of the research subjects of functional analysis are infinite-dimensional topological vector spaces, their mappings and relevant objects. Historically functional analysis emerged as a mean to research Fourier transformation, differential and integral equations. Starting from the second half of XX-th century functional analysis expanded to include a range of new sections via generalizing classical finite-dimensional theory results to infinite-dimensional case, which illustrate actuality of internal functional analysis theory development.

The main part of the thesis consists of an introduction, four sections, divided into subsections, conclusions, list of references and an appendix with the list of the author's publications concerning the topic of the thesis and the scientific seminars and conferences, at which the obtained results were reported.

The introduction grounds the relevance of the research topic, gives short historical review of its state, formulates the purpose and tasks of the research, indicates the scientific novelty and also points out where the results of the dissertation have been discussed and published.

Section 1 provides review of works, which are relevant to the topic of the dissertation research. A review of classical results of Riemannian geometry, that relate to the subject of research, is given, i.e., definition of a Riemannian manifold, metric tensor existence, Riemannian connection, Levi–Civita connection and completeness of a Riemannian manifold. A number of modern papers on Riemannian geometry, that consider elliptical equations on Riemannian manifolds, is reviewed. Fomin and Skorokhod directional differentiabilities of measures, differentiabilty along vector fields, are reviewed, connection between them is established.

Section 2 considers infinite-dimensional Riemannian manifolds. The construction of internal metric is considered on a connected Riemannian manifold, i.e., infimum of lengths of piecewise smooth curves that connect respective points. It is shown that the topology of a connected Riemannian manifold, induced by the internal metric, is not weaker than the original topology.

A condition of the atlas uniformity of a Riemannian manifold is proposed. It is proved that a uniform Riemannian manifold is complete with respect to the internal metric. It is shown that under some additional conditions, which hold in case of a uniform atlas, internal metric is consistent with the original manifold's topology. Actually, the conditions needed to prove internal metric consistency, are weaker than atlas uniformity, however due to the need for metric completeness, we expect Riemannian manifolds uniformity later throughout the dissertation.

In order to give a non-trivial example, it is shown that, when some additional conditions hold, a domain boundary and a joint function level surface are Riemannian manifolds with uniform atlases.

In Section 3 L^2-version of Laplacian on an (infinite-dimensional) Riemannian manifold is introduced. We prove the correctness of Dirichlet problem for equations with the introduced Laplacian in a domain in a Riemannian manifold of a certain class. Correctness is considered as existence and uniqueness of a problem's solution.

A model example of a uniform Riemannian manifold, for which all the technical conditions, used to prove correctness of the given Dirichlet problem, is given.

L^p_v vector fields spaces are introduced, in a similar fashion to the way that Bochner integrability is built. Integral of an integrable vector field does not make sense unless the manifold is embedded in a vector space. It is proved that a measurable vector field belongs to L^p_v if and only if its norm belongs to the corresponding L^p functional space. L^p_v completeness is proven. L^2_v is in particular used to construct the Laplacian.

Section 4 examines a diffeomorphic mapping between infinite-dimensional Riemannian manifolds with uniform atlases, as a mean to extend the class of correct boundary value problems.

Two examples are given to illustrate the diffeomorphisms method. The first example proves correctness of a certain class of boundary value problems in a domain in a Hilbert space. The second constructs a boundary value problem, associated with stereographical sphere projection, hence illustrating the diffeomorphisms method on Riemannian manifolds that are not domains in a Hilbert space.

The appendix contains applicant's publications list concerning the topic of the thesis and informs where the results of the dissertation have been reported and discussed.

Prime dissertation results, which constitute dissertation novelty, are the following:

– Non-trivial examples of classes of infinite-dimensional Riemannian manifolds with uniform atlases are built. Connection between internal metric and original topology is researched.

– L^2 version of Laplacian with respect to measure in (infinite-dimensional) Riemannian manifold is introduced.

– Technical conditions, which, if held, guarantee correctness (existence and uniqueness) of a certain class of Dirichlet problems for equations with the introduced Laplacian.

– Non-trivial model example of a Riemannian manifold that satisfies all the technical conditions, used to build Laplacian and to prove correctness of Dirichlet problem.

– Diffeomorphisms method is suggested as a mean to extend the class of correct boundary value problems.

The main results of the thesis are published in five papers in professional publications (two of them are published in journal indexed by Scopus and Web of Science) and in three conference proceedings (two of them are international).

Keywords: Hilbert space, Riemannian manifold, Borel measure, differentiation of measures, Laplace operator, Dirichlet problem.

Список опублікованих праць здобувача за темою дисертації.

1. *Богданский Ю. В., Потапенко А. Ю.* Лапласиан по мере на римановом многообразии и задача Дирихле. I // *Укр. мат. журн.* — 2016. — Т. 68, № 7. — С. 897–907.

2. *Богданский Ю. В., Потапенко А. Ю.* Лапласиан по мере на римановом многообразии и задача Дирихле. II // *Укр. мат. журн.* — 2016. — Т. 68, № 11. — С. 1443–1449.

3. *Потапенко О. Ю.* Нескінченновимірні ріманові многовиди з рівномірною структурою // *Наукові вісті НТУУ "КПІ".* — 2016. — Т. 108, № 4. — С. 73–79.

4. *Потапенко А. Ю.* Краевая задача, ассоциированная с диффеоморфизмом между римановыми многообразиями // *Системні дослідження та інформаційні технології.* — 2018. — № 1. — С. 132–140.

5. *Потапенко А. Ю.* Пример исследования корректности краевых задач на основе метода диффеоморфизмов // *Системні дослідження та інформаційні технології.* — 2018. — № 3. — С. 91–97.

6. *Потапенко А. Ю.* Бесконечномерные римановы многообразия с равномерной структурой. Лапласиан по мере и задача Дирихле // Матеріали конференції XIV Всеукраїнська науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених "Теоретичні і прикладні проблеми фізики, математики та інформатики", том 2. — 05.2016. — С. 67–70.

7. *Потапенко А. Ю.* Расширение класса корректных краевых задач на области в римановом многообразии методом диффеоморфизмов // Збірник наукових праць "Велес" за матеріалами III Міжнародної Конференції "Зимові наукові читання", 1 частина. — 01.2018. — С. 78–87.

8. *Potapenko O. Yu.* Diffeomorphism-associated boundary value problem on a Riemannian manifold // Book of abstracts of the 4th International Conference on memory of corresponding member of National Academy of Ukraine Valery Sergeevich Melnik. — 2018. — P. 58.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$B_r(x)$	відкрита куля радіусу r з центром в точці x;
$\cos\measuredangle(x,y)$	косинус кута між векторами x і y;
$C_0^1(G)$	сукупність функцій з $C^1(G)$, носії яких не перетинаються з деякою ε-межею ∂G;
$C_b(\mathcal{M})$	сукупність обмежених неперервних функцій на многовиді $\mathcal{M}$;
$C_b(G)$	сукупність обмежених неперервних функцій на області G;
$C_b^1(\mathcal{M})$	сукупність обмежених неперервно диференційовних функцій на многовиді $\mathcal{M}$;
$C_b^1(G)$	сукупність обмежених неперервно диференційовних функцій на області G;
$C_{b;v}(\mathcal{M})$	сукупність обмежених неперервних векторних полів на многовиді $\mathcal{M}$;
$C_{b;v}(G)$	сукупність обмежених неперервних векторних полів на області G;
$C_{b;v}^1(\mathcal{M})$	сукупність обмежених неперервно диференційовних векторних полів на многовиді $\mathcal{M}$;
$C_{b;v}^1(G)$	сукупність обмежених неперервно диференційовних векторних полів на області G;
Δ	лапласіан за мірою: $\Delta = \operatorname{div}\circ\overline{\mathbf{grad}}$;
div	дивергенція за мірою: $\operatorname{div} = -(\mathbf{grad})^*$;
∂G	межа множини G;
$D^\perp$	ортогональне доповнення до множини D;
$\overline{F}$	замикання лінійного оператора F;
γ	граничний оператор сліду;
$\mathbf{grad}\, f$	градієнт функції f;
$\overline{G} = G\cup\partial G$	замикання множини G;
g	метричний тензор;

$\operatorname{Ker} F$	ядро оператора F;
$\lambda_{\min}(\mathbb{A})$	найменше власне число матриці $\mathbb{A}$;
$L(c)$	довжина кусково гладкого шляху c;
$L^p_v(\mathcal{M}) = L^p_v(\mathcal{M}, \sigma)$	$(1 \leqslant p < \infty)$ простір інтегровних зі степінем p векторних полів на многовиді $\mathcal{M}$ по відношенню до міри σ;
$\mathbb{N}$	множина натуральних чисел;
$\operatorname{ort}_A h$	орт вектора h по відношенню до підпростору A;
$\Phi^{\mathbf{X}}_t$	потік векторного поля $\mathbf{X}$;
$\operatorname{pr}_A h$	проекція вектора h на підпростір A;
ρ	внутрішня метрика: інфімум довжин кусково гладких шляхів, що поєднують відповідні точки;
$\rho^{\mathbf{X}}_\sigma = \operatorname{div}_\sigma \mathbf{X}$	логарифмічна похідна міри σ вздовж поля $\mathbf{X}$ (дивергенція поля $\mathbf{X}$ відносно міри σ);
$\mathbb{R}$	поле дійсних чисел;
$\sigma_{\min}(\mathbb{A})$	найменше сингулярне число матриці $\mathbb{A}$;
$T_p\mathcal{M}$	дотичний до многовиду $\mathcal{M}$ простір в точці p;
ξ^φ	представлення вектора ξ в карті φ;
л.о.(G)	лінійна оболонка множини G;
о.о.(G)	опукла оболонка множини G;

ВСТУП

Актуальність теми. Дисертаційна робота присвячена дослідженню крайових задач в області на нескінченновимірних многовидах і просторах. Дослідження крайових задач з нескінченновимірним аргументом є однією з найважливіших задач функціонального аналізу. Предметом дослідження функціонального аналізу є нескінченновимірні топологічні векторні простори, їх відображення та пов'язані об'єкти. Історично функціональний аналіз завдячує своїм виникненням як напрямку дослідженню перетворення Фур'є, диференційних і інтегральних рівнянь. Однак, у другій половині XX століття функціональний аналіз поповнився такою низкою розділів, отриманих шляхом узагальнення класичної скінченновимірної теорії на нескінченновимірний випадок, що, словами А. Г. Костюченка в передмові редактора перекладу книги [21] 1962-го року, "Функціональний аналіз за останні два десятиліття настільки розрісся, настільки широко і глибоко проник майже в усі області математики, що зараз навіть складно визначити власне предмет цієї дисципліни".

Потреба в такому узагальненні виникла природним чином у зв'язку з розвитком математичної фізики; крайові задачі — актуальне питання цієї науки, а отже, розвиток методів побудови та аналізу крайових задач в нескінченновимірних просторах та на нескінченновимірних многовидах є одним з перспективних напрямів розвитку сучасної математики.

Найбільш плідними підходами до розгляду крайових задач в нескінченновимірних просторах виявились імовірнісні методи, варіаційний підхід та метод потенціалів, побудований на основі теорії диференційовних мір.

В скінченновимірному випадку задача Діріхле з (параболічним) диференціальним оператором з імовірнісної точки зору вперше достатньо повно була розглянута Дж. Л. Дубом [51]. Однак, використані методи дослідження не можуть бути розповсюдженими на нескінченновимірний випадок за рахунок відсутності нескінченновимірних аналогів використаних в роботі теорем існування і єдиності розв'язків крайових задач із теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними. Л. Гросс [52] першим використав імовірнісний підхід в нескінченновимірному випадку; більш точно, була досліджена перша крайова задача для еліптичних рівнянь на абстрактному вінеровському просторі. До більш пізніх робіт, в яких досліджено крайові задачі в нескінченновимірних просторах з імовірнісної точки зору, відноситься низка робіт 1970-х років М. М. Фролова [41; 42; 44] і робота А. Ю. Хреннікова [45].

Варіаційний підхід до дослідження задачі Діріхле в нескінченновимірних просторах використовується, наприклад, в роботі М. М. Фролова [43]. Метод потенціалів — в роботі А. А. Беляєва [3].

Всі наведені роботи розглядають випадок нескінченновимірних просторів. Наскільки відомо автору, крайові задачі на нескінченновимірних многовидах раніше досліджено не було.

В дисертаційній роботі узагальнено на випадок нескінченновимірних многовидів запропонований Ю. В. Богданським [10] підхід до побудови оператора Лапласа "в L^2-версії" та задачі Діріхле на його основі. Прослідкуються зв'язки наведених досліджень з проблемами теорії випадкових процесів: див. роботу К. В. Ральченка і Г. М. Шевченка [56].

В дисертаційній роботі використовується апарат поверхневого інтегрування. Однією з перших робіт, в якій було розпочато дослідження поверхневих мір в нескінченновимірному просторі, є класична робота А. В. Скорохода [34]. Цій тематиці було присвячено великий цикл робіт О. В. Угланова, зокрема роботи [35; 36] (див. також книгу [59]), який розробив побудову поверхневих мір на поверхнях скінченної корозмірності в нескінченновимірних просторах. Але цей підхід технічно складний. Інший варіант — підхід В. І. Богачова і О. В. Пугачова [33; 46]. Він ґрунтується на методі Маллявена і є також технічно обтяжливим. Ю. В. Богданським у роботі [10] було запропоновано інший підхід до побудови асоційованої міри для замкненої поверхні корозмірності 1, вкладеної в гільбертів простір. Вказаний підхід до побудови поверхневої міри на поверхні в банаховому многовиді вперше розглядається в роботі [8]. Узагальнення побудови асоційованої міри на випадок замкненої поверхні довільної скінченної корозмірності, вкладеної в банахів многовид, а також дослідження властивості транзитивності отриманої конструкції виконано в роботах Ю. В. Богданського у співавторстві з ученицею Богданського К. В. Моравецькою [11; 12].

В дисертаційній роботі використовується аналог поверхневої міри [10] для випадку ріманового многовиду.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана на кафедрі математичних методів системного аналізу Інституту прикладного системного аналізу Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського" в рамках державної науково-дослідної роботи "Застосування математичних методів в дослідженні інтегральних характеристик детермінованих та стохастичних складних систем", номер державної реєстрації 0118U003669.

Об'єкт дослідження. Еліптичні рівняння з лапласіаном в L^2-версії на рівномірних ріманових многовидах.

Предмет дослідження. Коректність еліптичних рівнянь з лапласіаном в L^2-версії на рівномірних ріманових многовидах, перетворення задачі Діріхле спеціального типу при дифеоморфному відображенні між рівномірними рімановими многовидами.

Мета і завдання дослідження. Завдання дисертаційної роботи — дослідження конструкції лапласіана в так званій L^2-версії на нескінченновимірних ріманових многовидах; дослідження класу коректних крайових задач в області на нескінченновимірних ріманових многовидах (задач, які мають, і при тому єдиний, розв'язок). Основна мета роботи — дослідження методів розширення класу коректних крайових задач в

L^2-версії на нескінченновимірних ріманових многовидах.

Методи дослідження. В роботі використовувались методи математичного і функціонального аналізу, диференціальної геометрії, теорії міри і інтеграла, елементи теорії матриць.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати дисертаційної роботи, які визначають її наукову новизну та виносяться на захист, наступні:

– Побудовано нетривіальні приклади певного класу нескінченновимірних ріманових многовидів, наділених рівномірним атласом. Досліджено зв'язок внутрішньої метрики з вихідною топологією.

– Запропоновано L^2-версію лапласіана за мірою на (нескінченновимірному) рімановому многовиді.

– З'ясовано технічні умови на ріманів многовид, за яких стає можливим встановити коректність (існування та єдиність розв'язку) певного класу задач Діріхле для рівнянь з лапласіаном за мірою.

– Наведено нетривіальний модельний приклад ріманового многовиду, що задовольняє усі технічні умови, використані при побудові лапласіана та доведенні коректності задач Діріхле.

– Запропоновано метод дифеоморфізмів як спосіб розширення класу коректних крайових задач.

Практичне значення одержаних результатів. Робота має теоретичний характер. Результати можуть бути використані у подальших дослідженнях крайових задач в гільбертових просторах та на ріманових многовидах.

Особистий внесок здобувача. Постановка задачі, визначення напрямку та плану дослідження належить науковому керівнику здобувача доктору фіз.-мат. наук, професору Ю. В. Богданському. За результатами дисертації автором опубліковано 5 робіт [13; 14; 29; 30; 32], з них [13] і

[14] у співавторстві з науковим керівником. У спільних роботах особисті внески співаторів є рівноцінними.

Апробація результатів дисертації. Конференції і семінари, на яких були представлені результати роботи:

– XIV Всеукраїнська науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених “Теоретичні і прикладні проблеми фізики, математики та інформатики”, м. Київ, 26-27.05.16.

– III Міжнародна конференція “Зимові наукові читання”, м. Київ, 31.01.18.

– 4th International Conference on memory of corresponding member of National Academy of Ukraine Valery Sergeevich Melnik, м. Київ, 04-06.04.18.

– Науковий семінар “Алгебра і аналіз” кафедри математичних методів системного аналізу, Інститут прикладного системного аналізу, Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 12.04.18.

– Науковий семінар “Київський семінар з функціонального аналізу” Інституту математики НАН України, 16.01.19.

– Науковий семінар “Сучасний аналіз” кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей, Фізико-математичний факультет, Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 17.01.19.

Публікації. За результатами дисертаційної роботи опубліковано 8 наукових праць, у тому числі 5 статей [13; 14; 29; 30; 32] у наукових фахових виданнях, що включені до міжнародних наукометричних баз (2 [13; 14] опубліковано у журналі, який включено до наукометричних баз Scopus та Web of Science), 3 матеріали та тези доповідей конференцій [28; 31; 55].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, переліку умовних позначень, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку зі списком опублікованих праць здобувача за темою дисертації і наукових семінарів та конференцій, на яких доповідались отримані результати. Основний текст дисертації складає 132 сторінки, список використаних джерел має обсяг 7 сторінок та складається з 60 найменувань.

Користуючись нагодою, автор висловлює щиру подяку науковому керівнику Юрію Вікторовичу Богданському за наукове керівництво роботою, цінні зауваження при обговоренні результатів та постійну увагу.

Короткий зміст дисертації

У вступі до дисертації обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, сформульовано мету роботи, висвітлено наукову новизну. Розглянуто структуру роботи, а також наведено інформацію щодо апробації результатів та публікацій за темою дисертації.

У першому розділі проведено огляд робіт, що мають відношення до теми дисертаційного дослідження. Наведено огляд класичних результатів ріманової геометрії. Проведено огляд ряду сучасних робіт з ріманової геометрії, присвячених еліптичним рівнянням на ріманових многовидах. Розглянуто диференційовність мір уздовж напрямків і уздовж векторних полів.

У другому розділі розглянуто нескінченновимірні ріманові многовиди. *Ріманів многовид* $\mathcal{M}$ визначається як сукупність дійсного гільбертового многовиду класу C^2 з модельним простором H і заданого на ньому *метричного тензора* g. Метричний тензор — гладке симетричне строго додатньо визначене тензорне поле типу $(2,0)$: в кожній точці $p \in \mathcal{M}$ тензор g_p є симетричним білінійним обмеженим відображенням $g_p : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$, для якого виконуються умови:

– для будь-яких точки $p \in \mathcal{M}$ і карти (U, φ) в точці p існує таке $\delta^{\varphi} > 0$, що для довільних векторів ξ_1, ξ_2 з простору $T_p\mathcal{M}$:

$$g_p(\xi_1, \xi_2) = g_p(\xi_2, \xi_1); g_p(\xi_1, \xi_1) \geqslant \delta^{\varphi} \|\xi_1^{\varphi}\|_H^2,$$

– для будь-яких області G в $\mathcal{M}$ і гладких векторних полів $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ на G:

$$\text{функція аргумента } q \; g_q(\mathbf{X}_q, \mathbf{Y}_q) \text{ належить класу } C^1 \text{ на } G.$$

Метричний тензор дозволяє визначити норму на дотичному просторі, а отже і довжину кусково-гладкого шляху. Внутрішня метрика ρ на зв'язному рімановому многовиді визначається як інфімум довжин кусково-гладких кривих, що поєднують відповідні точки. При подальших дослідженнях виникає потреба наявності метричної повноти многовиду за внутрішньою метрикою. Наступна властивість атласу многовиду забезпечує бажану повноту.

Означення 2.2. Атлас $\Omega = \{(\varphi, U_{\varphi})\}$ $(\varphi : U_{\varphi} \longrightarrow H)$ будемо називати *рівномірним*, якщо існують такі $r > 0, \delta^-, \delta^+ > 0$, що

1) для кожної точки $p \in \mathcal{M}$ існує така карта (φ_p, U_p), що $\varphi_p(U_p) \supset \supset B_r(\varphi_p(p))$, де $B_r(\varphi_p(p)) \triangleq \{q \in H : \|\varphi_p(p) - q\| < r\}$.
2) для кожних $p \in \mathcal{M}, q \in U_p, \xi \in T_q\mathcal{M}$ виконується $\delta^-\|\xi^{\varphi_p}\|^2 \leqslant \leqslant \|\xi\|_H^2 \leqslant \delta^+\|\xi^{\varphi_p}\|^2$ для карти (φ_p, U_p) з пункту 1).

Ріманів многовид із зафіксованим на ньому рівномірним атласом будемо називати *рівномірним.*

Твердження 2.1. *Рівномірний ріманів многовид $\mathcal{M}$ є метрично повним за внутрішньою метрикою.*

Проведено дослідження узгодженості внутрішньої метрики і вихідної топології многовиду.

Твердження 2.2. *Нехай* $\mathcal{M}$ *— ріманів многовид,* ρ *— його внутрішня метрика. Тоді топологія, породжена* ρ*, не слабша за вихідну топологію* $\mathcal{M}$*.*

Твердження 2.3. *Нехай* $\mathcal{M}$ *— ріманів многовид,* ρ *— його внутрішня метрика; в кожній його точці* $p \in \mathcal{M}$ *існують такі карта* (φ, U) *та число* $\delta_+^\varphi > 0$*, що виконується умова*

$$\forall q \in U, \xi \in T_q\mathcal{M} : g_q(\xi, \xi) \leqslant \delta_+^\varphi \|\xi^\varphi\|_H^2.$$

Тоді топологія, породжена ρ*, співпадає з вихідною топологією* $\mathcal{M}$*.*

Зокрема умова твердження 2.3 виконується у випадку рівномірності атласу многовиду.

Досліджено питання повноти дотичного простору $T_p\mathcal{M}$. За рахунок строгої додатності метричного тензора, зі збіжності (фундаментальності) послідовності векторів в дотичному просторі $T_p\mathcal{M}$ випливає збіжність (відповідно, фундаментальність) відповідної послідовності представлень векторів в модельному просторі H. Для доведення оберненої імплікації, а отже і повноти простору $T_p\mathcal{M}$, здається необхідним вимагати наявність додаткової властивості, вже знайомої з наведеного твердження 2.3.

Твердження 2.4. *Нехай* $\mathcal{M}$ *— ріманів многовид, для* $p \in \mathcal{M}$ *існують такі карта* (φ, U) *та число* $\delta_+^\varphi > 0$*, що виконується умова:*

$$\forall q \in U, \xi \in T_q\mathcal{M} : g_q(\xi, \xi) \leqslant \delta_+^\varphi \|\xi^\varphi\|_H^2.$$

Тоді дотичний простір $T_p\mathcal{M}$ *буде повним.*

Умова твердження 2.4 виконується в кожній точці у випадку виконання умови рівномірності.

Запропоновано конструкцію косинуса кута між підпросторами гільбертова простору, що узагальнює стереометричне поняття кута між площинами/прямими.

Означення 2.3. Для підпросторів $A, B \neq \{0\}$ гільбертового простору H покладемо

$$\cos\measuredangle(A,B) \triangleq \max\left\{ \inf_{y\in B\setminus\{0\}} \sup_{x\in A\setminus\{0\}} \cos\measuredangle(x,y); \inf_{x\in A\setminus\{0\}} \sup_{y\in B\setminus\{0\}} \cos\measuredangle(x,y) \right\},$$

де $\cos\measuredangle(x,y) = \frac{(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|}$ — косинус кута між векторами x і y.

Відмічено певний зв'язок між введеним поняттям косинуса кута і розхилом між підпросторами: для підпросторів A, B однакової скінченної (ко)розмірності виконується

$$\cos\measuredangle(A,B) = 1 - \frac{1}{2}\hat{d}^2(A,B),$$

означення метрики $\hat{d}$ дивитися, наприклад, в [22].

Отримано ряд результатів стосовно косинуса кута між підпросторами, які в подальшому використовуються для побудови нетривіальних прикладів рівномірного ріманового многовиду.

***Лема* 2.3.** *Нехай $A = \{n_1, n_2, \ldots n_k\}^\perp, B = \{m_1, m_2, \ldots m_p\}^\perp$ — підпростори скінченної корозмірності (k і p, відповідно) в гільбертовому просторі H, при чому $k \geqslant p$ і $\{n_1, n_2, \ldots n_k\}, \{m_1, m_2, \ldots m_p\}$ — ортонормовані системи. Тоді:*

$$\cos\measuredangle(A,B) = \sigma_{\min}(\mathbb{\Gamma}) = \sqrt{\lambda_{\min}(\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma})},$$

де

$$\mathbb{\Gamma} = \begin{pmatrix} (n_1, m_1) & \ldots & (n_1, m_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (n_k, m_1) & \ldots & (n_k, m_p) \end{pmatrix}.$$

***Зауваження* 2.4.** *Для A, B — замкнених підпросторів однакової скінченної корозмірності — виконується*

$$\cos\measuredangle(A,B) = \inf_{y\in B\setminus\{0\}} \sup_{x\in A\setminus\{0\}} \cos\measuredangle(x,y) = \inf_{x\in A\setminus\{0\}} \sup_{y\in B\setminus\{0\}} \cos\measuredangle(x,y).$$

***Наслідок* 2.1.** *Нехай* $A = \{\tilde n_1, \tilde n_2, \dots \tilde n_k\}^{\perp}, B = \{\tilde m_1, \tilde m_2, \dots \tilde m_k\}^{\perp}$ — *підпростори однакової скінченної корозмірності* k *в* H*:* $\{\tilde n_1, \tilde n_2, \dots \tilde n_k\}$ *і* $\{\tilde m_1, \tilde m_2, \dots \tilde m_k\}$ — *лінійно незалежні системи. Тоді:*

$$\cos\measuredangle(A,B) \geqslant \frac{|\det\widetilde{\mathbb{\Gamma}}|}{\prod\limits_{i=1}^{k}\|\tilde n_i\| \prod\limits_{i=1}^{k}\|\tilde m_i\|}\left(\frac{k-1}{k^2}\right)^{\frac{k-1}{2}},$$

де 0^0 *(у випадку* $k=1$*) вважаємо за* 1*, а також:*

$$\widetilde{\mathbb{\Gamma}} = \begin{pmatrix} (\tilde n_1, \tilde m_1) & \dots & (\tilde n_1, \tilde m_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\tilde n_k, \tilde m_1) & \dots & (\tilde n_k, \tilde m_k) \end{pmatrix}.$$

Побудовані такі приклади рівномірного ріманового многовиду.

***Теорема* 2.1.** *Нехай* H — *гільбертовий простір.* $\mathcal{M} = \{x \in H : F_1(x) = F_2(x) = \dots = F_n(x) = 0\}$ — *гладка (*F_i — *гладкі функціонали, визначені на* H*) поверхня спільного рівня корозмірності* n *(*$\{\mathbf{grad}\, F_1(p), \mathbf{grad}\, F_2(p), \dots \mathbf{grad}\, F_n(p)\}$ — *лінійно незалежна система в кожній точці* $p \in \mathcal{M}$*). Нехай також існують такі* $\delta, \varepsilon > 0$*, що для будь-яких точок* $p, q \in \mathcal{M}$ *таких, що* $\|p - q\| < \delta$*, виконується:*

$$\frac{\begin{vmatrix} (\mathbf{grad}\, F_1(p), \mathbf{grad}\, F_1(q)) & \cdots & (\mathbf{grad}\, F_1(p), \mathbf{grad}\, F_n(q)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{grad}\, F_n(p), \mathbf{grad}\, F_1(q)) & \cdots & (\mathbf{grad}\, F_n(p), \mathbf{grad}\, F_n(q)) \end{vmatrix}}{\prod\limits_{i=1}^{n}\|\mathbf{grad}\, F_i(p)\| \prod\limits_{i=1}^{n}\|\mathbf{grad}\, F_i(q)\|} \geqslant \varepsilon.$$

Тоді $\mathcal{M}$ — *рівномірний ріманів многовид.*

***Наслідок* 2.2.** *Нехай* H — *гільбертовий простір.* $\mathcal{M} = \{x \in H : F(x) = 0\}$ — *поверхня рівня корозмірності* 1*. Нехай функція* F — *гладка класу* C^2*, а також існують такі* $K, M > 0$*, що для всіх* $x \in \mathcal{M}, y \in$ *о.о.*$(\mathcal{M})$ *виконується:*

$$\|F'(x)\| \geqslant K, \|F''(y)\| \leqslant M.$$

Тоді $\mathcal{M}$ *— рівномірний ріманів многовид.*

***Наслідок* 2.3.** *Нехай* H *— гільбертовий простір.* $\mathcal{M} = \{x \in \in H : F_1(x) = F_2(x) = 0\}$ *— поверхня рівня корозмірності* 2 ($\mathbf{grad}\, F_1(x), \mathbf{grad}\, F_2(x)$ *— л.н.з). Нехай функції* F_1, F_2 *— гладкі класу* C^2, *а також існують такі* $K, M > 0$ *і* $C \in [0,1)$, *що для* $i = 1,2$ *і для всіх* $x \in \mathcal{M}$, $y \in$ *о.о.*$(\mathcal{M})$ *виконується:*

$$\|F_i'(x)\| \geqslant K, \|F_i''(y)\| \leqslant M,$$

$$\frac{|(\mathbf{grad}\, F_1(x), \mathbf{grad}\, F_2(x))|}{\|\,\mathbf{grad}\, F_1(x)\| \cdot \|\,\mathbf{grad}\, F_2(x)\|} \leqslant C.$$

Тоді $\mathcal{M}$ *— рівномірний ріманів многовид.*

***Теорема* 2.2.** *Нехай* H *— гільбертовий простір.* $D \subset H$ *— область з гладкою межею,* $\mathcal{M} \triangleq \partial D$, $\mathbf{n}$ *— поле зовнішніх одиничних нормалей до* $\mathcal{M}$. *Нехай існують такі* $\delta, \varepsilon > 0$, *що для будь-яких точок* $p, q \in \mathcal{M}$ *таких, що* $\|p - q\| < \delta$, *виконується:*

$$(\mathbf{n}(p), \mathbf{n}(q)) \geqslant \varepsilon.$$

Тоді $\mathcal{M}$ *— рівномірний ріманів многовид.*

Третій розділ присвячено лапласіану за мірою і задачі Діріхле на його основі.

Наводяться позначення просторів функціоналів і векторних полів на многовиді та його області. Позначимо через $C_b(\mathcal{M})$ простір всіх обмежених неперервних дійсних функцій на $\mathcal{M}$, через $C_{b;v}(\mathcal{M})$ простір всіх неперервних обмежених векторних полів на $\mathcal{M}$, через $C_b^1(\mathcal{M})$ (відповідно $C_{b;v}^1(\mathcal{M})$) простір всіх функцій $f \in C_b(\mathcal{M})$ (відповідно всіх векторних полів $\mathbf{X} \in C_{b;v}(\mathcal{M})$), диференційовних в кожній точці $x \in \mathcal{M}$ з неперервною і обмеженою на всьому $\mathcal{M}$ похідною $f'(\cdot)$ (відповідно $\mathbf{X}'(\cdot)$). Тут $f'(p) \in T_p^*\mathcal{M}$ визначено формулою $f'(p) : T_p\mathcal{M} \ni \mathbf{Y}_p \longmapsto \mathbf{Y}_p f \in \mathbb{R}$, $\mathbf{X}'(p)$ — лінійний оператор в $T_p\mathcal{M}$, визначений формулою $\mathbf{X}'(p) : \mathbf{Y}_p \longmapsto$

$\longmapsto \nabla_{\mathbf{Y}_p}\mathbf{X}$, де ∇ — зв'язність Леві–Чивіти на $\mathcal{M}$ (нескінченновимірний варіант див., наприклад, в [19, с. 83]).

Нехай G — обмежена область в $\mathcal{M}$ з межею $S = \partial G$. Через $C^1(G)$ позначимо сукупність всіх функцій на $\overline{G}$, що допускають продовження на весь $\mathcal{M}$ до функцій класу $C^1_b(\mathcal{M})$; через $C^1_0(G)$ — сукупність функцій з $C^1(G)$, носії яких не перетинаються з деякою ε-межею S. Аналогічно визначаємо

$$C(G) = \left\{ f\big|_{\overline{G}} \middle| f \in C_b(\mathcal{M}) \right\} \text{ і } C^1_v(G) = \left\{ \mathbf{X}\big|_{\overline{G}} \middle| \mathbf{X} \in C^1_{b;v}(\mathcal{M}) \right\}.$$

Нехай σ — скінченна невід'ємна борелівська міра на $\mathcal{M}$. Через $L^p(G) = L^p(G, \sigma)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ позначимо простір вимірних функцій на G, які при піднесенні до степеня p є інтегровними по відношенню до міри $\sigma\big|_G$.

Векторне поле $\mathbf{X}$ на $\mathcal{M}$ назвемо *вимірним*, якщо існує така послідовність векторних полів $\mathbf{X}_m \in C_{b;v}(\mathcal{M})$, що збігається до $\mathbf{X}$ майже всюди $(\|\mathbf{X}_m(\cdot) - \mathbf{X}(\cdot)\| \longrightarrow 0 \pmod{\sigma})$.

Означення 3.3. Для $1 \leqslant p < \infty$ будемо казати, що вимірне векторне поле $\mathbf{X}$ на $\mathcal{M}$ *інтегровне зі степенем* p, тобто належить простору $L^p_v(\mathcal{M}) = L^p_v(\mathcal{M}, \sigma)$, якщо існує така послідовність векторних полів $\mathbf{X}_m \in C_{b;v}(\mathcal{M})$, що збігається до $\mathbf{X}$ майже всюди і виконується

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{\mathcal{M}} \|\mathbf{X}_m(\cdot) - \mathbf{X}(\cdot)\|^p \, d\sigma = 0.$$

Векторні поля з $L^1_v(\mathcal{M}) = L^1_v(\mathcal{M}, \sigma)$ і $L^2_v(\mathcal{M}) = L^2_v(\mathcal{M}, \sigma)$ назвемо, відповідно, *інтегровними* і *інтегровними з квадратом.*

Доведено критерій інтегровності векторного поля зі степенем p.

Теорема 3.1. *Нехай $1 \leqslant p < \infty$. Для того, щоб вимірне векторне поле $\mathbf{X}$ на $\mathcal{M}$ належало $L^p_v(\mathcal{M}, \sigma)$, необхідно і достатньо, щоб простору $L^p(\mathcal{M}, \sigma)$ належала функція $\|\mathbf{X}(\cdot)\|$.*

Скалярний добуток в $L^2_v(\mathcal{M})$ задаємо формулою:

$$(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \int\limits_{\mathcal{M}} (\mathbf{X}(\cdot),\mathbf{Y}(\cdot))_{(\cdot)}\,d\sigma = \int\limits_{\mathcal{M}} g_{(\cdot)}(\mathbf{X}(\cdot),\mathbf{Y}(\cdot))\,d\sigma,$$

а відповідну норму $\mathbf{X}$ позначимо символом $|||\mathbf{X}|||$.

Для векторного поля $\mathbf{X} \in L^p_v(\mathcal{M})$ відповідно норму позначимо

$$|||\mathbf{X}|||_p \triangleq \left(\int\limits_{\mathcal{M}} \|\mathbf{X}(\cdot)\|^p\,d\sigma\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Доведено повноту простору $L^p_v(\mathcal{M})$ за нормою $|||\cdot|||_p$.

***Теорема* 3.2.** *Для будь-якого $p : 1 \leqslant p < \infty$ векторний простір $L^p_v(\mathcal{M})$ є повним.*

Розглядається (нескінченновимірний) ріманів многовид $\mathcal{M}$ з модельним простором H і основним тензором g. σ — скінченна невід'ємна борелівська міра на $\mathcal{M}$. Вважаємо, що атлас многовиду $\mathcal{M}$ є рівномірним, що гарантує його метричну повноту, а також повноту просторів $L^p_v(\mathcal{M},\sigma)$.

Вважаємо, що міра σ має повний носій (для кожної непустої відкритої множини $U \subset \mathcal{M}$ виконана нерівність $\sigma(U) > 0$), завдяки чому із рівності $u = v \pmod{\sigma}$ (тут $u, v \in C^1_b(\mathcal{M})$) випливає рівність $\mathbf{grad}\,u = \mathbf{grad}\,v \pmod{\sigma}$. Тим самим коректно визначено оператор

$$\mathbf{grad} = \mathbf{grad}_{\mathcal{M}} : L^2(\mathcal{M}) \supset C^1_b(\mathcal{M}) \ni u \longmapsto \mathbf{grad}\,u \in L^2_v(\mathcal{M}).$$

Оскільки $C^1_b(\mathcal{M})$ щільно в $L^2(\mathcal{M})$, коректно визначено оператор

$$\mathrm{div} = -(\mathbf{grad})^* : L^2_v(\mathcal{M}) \longrightarrow L^2(\mathcal{M}).$$

У випадку, коли $\mathbf{grad}$ допускає замикання, лапласіан (за мірою σ) на $\mathcal{M}$ визначено формулою

$$\Delta = \mathrm{div} \circ \overline{\mathbf{grad}},$$

де Δ — самоспряжений оператор в $L^2(\mathcal{M})$ (див., наприклад, [5, с. 106]).

Нехай межа S обмеженої області $G \subset \mathcal{M}$ є гладким вкладеним в $\mathcal{M}$ підмноговидом корозмірності 1, а поле зовнішньої нормалі межі S може бути продовжено до векторного поля $\mathbf{n} \in C^1_{b;v}(\mathcal{M})$.

У тому випадку, коли міра σ диференційовна вздовж поля $\mathbf{n}$ в сильному сенсі, говоримо про "узгодженість S з мірою σ". При узгодженості міри σ з поверхністю $S = \partial G$ на S індукується поверхнева міра τ [8–10].

Оператор

$$\mathbf{grad}_G : L^2(G) \supset C^1(G) \ni u \longmapsto \mathbf{grad}\, u \in L^2_v(G)$$

є щільно визначеним, оскільки виконується наступне твердження.

Твердження 3.3. *Нехай G – область в $\mathcal{M}$ така, що $\sigma(\partial G) = 0$. Тоді $C^1_0(G)$ щільно в $L^2(G)$.*

У випадку, якщо оператор $\mathbf{grad}_G$ допускає замикання, а $\operatorname{div}_\sigma \mathbf{n}$ — логарифмічна похідна міри σ вздовж векторного поля $\mathbf{n}$ — лежить в $L^\infty(\mathcal{M})$, є коректною побудова оператора сліду

$$\gamma : L^2(G) \longrightarrow L^2(S) = L^2(S, \tau)$$

з областю визначення $\mathcal{D}(\overline{\mathbf{grad}_G})$, який для функцій $u \in C^1(G)$ співпадає з оператором обмеження: $u \mapsto u\big|_S$. Оператор γ є обмеженим оператором із банахова в нормі графіка простору $\mathcal{D}(\overline{\mathbf{grad}_G})$ в $L^2(S, \tau)$.

Оператор $\operatorname{div}_G : L^2_v(G) \longrightarrow L^2(G)$ введемо формулою

$$\operatorname{div}_G \triangleq -\left(\overline{\mathbf{grad}_G}\Big|_{\operatorname{Ker}\gamma}\right)^*.$$

Лапласіан — оператор $\Delta_G : L^2(G) \longrightarrow L^2(G)$ — визначимо формулою: $\Delta_G \triangleq \operatorname{div}_G \circ \overline{\mathbf{grad}_G}$; Δ_G є щільно визначеним, оскільки він є розширенням самоспряженого оператора $-\left(\overline{\mathbf{grad}_G}\right)^* \overline{\mathbf{grad}_G}$.

Важливою частиною третього розділу є побудова прикладу ріманового многовиду, на якому виконуються всі припущення, що використовуються при побудові операторів $\overline{\mathbf{grad}}$, div_G і Δ_G. Приклад такого многовиду будується в якості поверхні в гільбертовому просторі.

***Теорема* 3.3.** *Нехай D — обмежена область в гільбертовому просторі H, $\mathbf{N} \in C^1_{b;v}(H)$ — векторне поле в H, яке є продовженням поля зовнішньої одиничної нормалі до межі $\mathcal{M} = \partial D$ області D, хай виконується умова теореми 2.2, μ — борелівська скінченна (невід'ємна) диференційовна вздовж поля $\mathbf{N}$ міра в H, μ має повний носій, $\mathrm{div}_\mu \mathbf{N} \in L^\infty(H)$, σ — міра на $\mathcal{M}$, індукована мірою μ. Нехай також оператор $\mathbf{grad} : L^2(H) \supset C^1_b(H) \longrightarrow L^2_v(H)$ допускає замикання. Тоді індукований на $\mathcal{M}$ оператор*

$$\mathbf{grad}_{\mathcal{M}} : L^2(\mathcal{M}, \sigma) \supset C^1_b(\mathcal{M}) \ni u \longmapsto \mathbf{grad}_{\mathcal{M}}\, u \in L^2_v(\mathcal{M}, \sigma)$$

є коректно визначеним і допускає замикання.

Відмітимо, що умови на міру μ, що накладаються в теоремі 3.3, можуть бути реалізованими. Побудова такої міри проводиться, наприклад, в роботі [15] як згладження спеціальним чином вздовж поля $\mathbf{N}$ гаусової міри, кореляційний оператор якої має щільний образ в H.

Доведена коректність задачі Діріхле в області ріманового многовиду при виконанні деяких технічних умов.

***Теорема* 3.4.** *При виконанні технічних умов*

а) *векторне поле* $\mathbf{n}$ *є повним і міра* σ *диференційовна вздовж поля* $\mathbf{n}$ *(узгодженість* S *і* σ*);*

б) $\mathrm{div}_\sigma \mathbf{n} \in L^\infty(\mathcal{M})$*;*

в) *оператор* $\mathbf{grad}_G$ *допускає замикання;*

задача

$$\Delta_G u - a \cdot u = f,$$

$$\gamma(u) = \varphi$$

в області G ріманового многовиду $\mathcal{M}$ має, і притому єдиний, розв'язок.

При побудові модельного прикладу ріманового многовиду будувалася міра σ на $\mathcal{M}$ така, що оператор $\mathbf{grad}_{\mathcal{M}}$ допускає замикання. Виконавши процедуру згладження, ми отримаємо міру, що задовольняє умови а), б). Залишається для такої міри довести умову в), що і зроблено в наступній теоремі.

***Теорема* 3.5.** *Нехай $\mathcal{M}$ — ріманів многовид класу C^2, σ — скінченна борелівська міра на $\mathcal{M}$ з повним носієм, оператор $\mathbf{grad} = \mathbf{grad}_{\mathcal{M}} : L^2(\mathcal{M}, \sigma) \supset C_b^1(\mathcal{M}) \ni u \longmapsto \mathbf{grad}\, u \in L_v^2(\mathcal{M}, \sigma)$ допускає замикання. G — обмежена область в $\mathcal{M}$, межа якої узгоджена з мірою σ, і для відповідного векторного поля $\mathbf{n} \in C_b^1(\mathcal{M})$ (продовження поля одиничної зовнішньої нормалі до $S = \partial G$) $\mathrm{div}_\sigma \mathbf{n} \in L^\infty(\sigma)$. Для $u \in C^1(G)$ покладемо $\mathbf{grad}_G\, u = (\mathbf{grad}\, \tilde{u})\big|_G$ ($\tilde{u} \in C_b^1(\mathcal{M})$ — продовження u на $\mathcal{M}$). Тоді оператор $\mathbf{grad}_G : L^2(G; \sigma) \supset C^1(G) \ni u \longmapsto \mathbf{grad}_G\, u \in L_v^2(G; \sigma)$ допускає замикання.*

У четвертому розділі досліджується дифеоморфне відображення між нескінченновимірними рімановими многовидами з рівномірними атласами як спосіб розширення класу коректних крайових задач.

В цьому розділі $\mathcal{M}_1$ і $\mathcal{M}_2$ — сепарабельні ріманові многовиди класу C^2 з рівномірними атласами Ω_1 і Ω_2, відповідно; $F : \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2$ — обмежений дифеоморфізм між ними, тобто, існує таке $K > 0$, що $\|F'(p)\|, \|(F^{-1})'(q)\| \leqslant K$ для всіх $p \in \mathcal{M}_1, q \in \mathcal{M}_2$; G_1 — область в $\mathcal{M}_1$ з гладкою межею $S_1 = \partial G_1$, $G_2 \triangleq F(G_1)$, $S_2 \triangleq \partial G_2 = F(S_1)$; μ_1 — скінченна борелівська міра на $\mathcal{M}_1$.

Означення 4.1. Векторне поле $\mathbf{Z} \in C^1_{b;v}(\mathcal{M})$ будемо називати *строго трансверсальним* до S, якщо існує $\delta > 0$ таке, що для кожної точки $p \in S$ виконується $d(\mathbf{Z}(p), T_pS) \geqslant \delta$ (тут $d(\mathbf{Z}(p), T_pS) = \inf\Big\{\|\mathbf{Z}(p) - \xi\| \;\Big|\; \xi \in T_pS\Big\}$).

***Лема* 4.1.** *Нехай $\mathbf{n}_1 \in C^1_{b;v}(\mathcal{M}_1)$ — строго трансверсальне до S_1 векторне поле. Тоді векторне поле $\mathbf{n}_2(\cdot) = F'(F^{-1}(\cdot))\mathbf{n}_1(F^{-1}(\cdot))$ строго трансверсальне до S_2.*

***Лема* 4.2.** *Нехай $\mathbf{grad}_{G_1}$ коректно заданий (міра μ_1 має повний носій) і допускає замикання в $L^2(G_1;\mu_1)$; для $A \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_2)$ $\mu_2(A) \triangleq \triangleq \mu_1(F^{-1}(A))$. Також*

$$\overline{\mathbf{grad}}_{G_1} f = 0 \ (\mathrm{mod}\, \mu_1) \Leftrightarrow f = \mathrm{const} \ (\mathrm{mod}\, \mu_1).$$

Тоді оператор $\mathbf{grad}_{G_2}$ також коректно заданий і допускає замикання в $L^2(G_2;\mu_2)$ і

$$\overline{\mathbf{grad}}_{G_2} f = 0 \ (\mathrm{mod}\, \mu_2) \Leftrightarrow f = \mathrm{const} \ (\mathrm{mod}\, \mu_2).$$

***Лема* 4.3.** *Для векторного поля $\mathbf{n}_2(\cdot) = F'(F^{-1}(\cdot))\mathbf{n}_1(F^{-1}(\cdot))$ і міри $\mu_2(A) = \mu_1(F^{-1}(A))$ виконується*

$$\mathrm{div}_{\mu_2}\mathbf{n}_2 = (\mathrm{div}_{\mu_1}\mathbf{n}_1) \circ F^{-1}.$$

***Наслідок* 4.1.** *Якщо $\mathrm{div}_{\mu_1}\mathbf{n}_1\Big|_{G_1} \in L^\infty(G_1)$, то $\mathrm{div}_{\mu_2}\mathbf{n}_2\Big|_{G_2} \in L^\infty(G_2)$.*

Відповідно до леми 4.2 і наслідку 4.1, з умов, що дозволяють коректно визначити граничний оператор сліду γ_1

$$\gamma_1 : \mathcal{D}(\overline{\mathbf{grad}}_{G_1}) \longrightarrow L^2(S_1) = L^2(S_1;\tau_1),$$

(τ_1 — поверхнева міра, породжена мірою μ_1) тобто, з існування замикання оператора $\mathbf{grad}_{G_1}$ і умови $\mathrm{div}_{\mu_1}\mathbf{n}_1\Big|_{G_1} \in L^\infty(G_1)$, випливають аналогічні умови, що дозволяють визначити граничний оператор сліду γ_2

$$\gamma_2 : \mathcal{D}(\overline{\mathbf{grad}}_{G_2}) \longrightarrow L^2(S_2) = L^2(S_2;\tau_2),$$

де τ_2 — поверхнева міра, породжена мірою μ_2.

Оператори γ_1 і γ_2 пов'язані наступним чином.

***Твердження* 4.2.** *Нехай $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbf{grad}}_{G_1})$. Тоді $u \circ F^{-1} \in \mathcal{D}(\overline{\mathbf{grad}}_{G_2})$ і*

$$\gamma_2(u \circ F^{-1}) = \gamma_1(u) \circ F^{-1}.$$

Існування граничних операторів сліду дозволяє побудувати дивергенції за мірою вже описаним в третьому розділі способом

$$\mathrm{div}_{G_1} \triangleq -\left(\overline{\mathbf{grad}}_{G_1}\Big|_{\mathrm{Ker}\,\gamma_1}\right)^*; \quad \mathrm{div}_{G_2} \triangleq -\left(\overline{\mathbf{grad}}_{G_2}\Big|_{\mathrm{Ker}\,\gamma_2}\right)^*.$$

Наступна лема встановлює зв'язок між операторами div_{G_1} і div_{G_2}.

***Лема* 4.4.** *Нехай $\mathbf{Z}_1 \in \mathcal{D}(\mathrm{div}_{G_1})$, $\mathbf{Z}_2(\cdot) = F'(F^{-1}(\cdot))\mathbf{Z}_1(F^{-1}(\cdot))$. Тоді $\mathbf{Z}_2 \in \mathcal{D}(\mathrm{div}_{G_2})$ і*

$$\mathrm{div}_{G_2} \mathbf{Z}_2 = (\mathrm{div}_{G_1} \mathbf{Z}_1) \circ F^{-1}.$$

Нехай $\overline{\mathbf{grad}}_{G_1}$ допускає замикання і виконана умова $\mathrm{div}_{\mu_1} \mathbf{n}_1\Big|_{G_1} \in$ $\in L^\infty(G_1)$, а значить, коректно визначені оператори $\overline{\mathbf{grad}}_{G_1}$, γ_1 і div_{G_1}. Завдяки лемам 4.1-4.2 і наслідку 4.1, ми можемо стверджувати, що оператори $\overline{\mathbf{grad}}_{G_2}$, γ_2 і div_{G_2} також коректно визначені. В такому разі справедлива наступна теорема.

***Теорема* 4.1.** *Функція $u_1 = u_2 \circ F$ буде розв'язком задачі Діріхле*

$$\mathrm{div}_{G_1}(k \cdot \overline{\mathbf{grad}}_{G_1} u) - a \cdot u = f,$$

$$\gamma_1(u) = \varphi$$

*тоді і тільки тоді коли u_2 буде розв'язком наступної задачі, яку назвемо F-*асоційованою *з нею*

$$\mathrm{div}_{G_2}\left((k \circ F^{-1}) \cdot F'(F^{-1}(\cdot))\left(F'(F^{-1}(\cdot))\right)^* \overline{\mathbf{grad}}_{G_2} u\right) -$$

$$-(a \circ F^{-1}) \cdot u = f \circ F^{-1},$$

$$\gamma_2(u) = \varphi \circ F^{-1}.$$

У прикладі 1 дослідження певного класу крайових задач на області в гільбертовому просторі зводиться до задачі Діріхле спеціального типу. Покладемо $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 = H$ — гільбертів простір; $G_2 \subset \subset \{y \in H : K_1 \leqslant \|y\| \leqslant K_2\}$ ($K_1, K_2 > 0$ — деякі константи) — обмежена та відділена від нуля область в H з гладкою межею $S_2 = \partial G_2$; $h \in L^2(G_2)$; $k \in C^1(G_2)$; $a \in C(G_2)$; $k(y) \geqslant \delta > 0$; $a(y) \geqslant \alpha > 0$; $\varphi \in \operatorname{Im}\gamma_2$.

Теорема 4.2. *Функція $u(y) = u_2(y)$ буде розв'язком задачі*

$$\operatorname{div}_{G_2}\Big(k(y)\Big(\|y\|^2\,\overline{\mathbf{grad}}_{G_2}\,u(y) + \beta(\overline{\mathbf{grad}}_{G_2}\,u(y), y)y\Big)\Big) - \\ - a(y)u(y) = h(y),$$

де $\beta > -1$, з крайовою умовою

$$\gamma_2(u) = \varphi$$

на області G_2 тоді і тільки тоді коли функція $u(x) = u_1(x) \triangleq u_2(F(x))$ буде розв'язком наступної задачі Діріхле на області $G_1 = F^{-1}(G_2)$:

$$\operatorname{div}_{G_1}\Big((k \circ F)\,\|\cdot\|^2\,\overline{\mathbf{grad}}_{G_1}\,u\Big) - (a \circ F)u = h \circ F,$$

$$\gamma_1(u) = \varphi \circ F,$$

де $F(x) = \|x\|^{\sqrt{1+\beta}-1}x$.

В прикладі 2 отримана крайова задача, асоційована зі стереографічною проекцією сфери, таким чином, проілюстрована робота методу дифеоморфізмів на ріманових многовидах, які не є областями в гільбертовому просторі.

Нехай H — сепарабельний гільбертів простір, $\{e_1, e_2, \dots e_n, \dots\}$ — його ортонормований базис; $H_1 =$ *л.о.*$\{e_2, \dots e_n, \dots\}$ — підпростір H корозмірності 1: $H = H_1 \oplus$ *л.о.*$\{e_1\} \simeq H_1 \oplus \mathbb{R}$; $\varphi(x) = x - (x, e_1)e_1$ — ортопроектор на H_1; $\mathcal{M} = \{x \in H : \|x - e_1\| = 1, \|\varphi(x)\| < \alpha < < 1, (x - e_1, e_1) < 0\}$ — частина нижньої напівсфери сфери S_1 з центром в e_1 радіуса 1 — ріманів многовид з рівномірним атласом, що складається з однієї карти $(\varphi, \mathcal{M})$ $(\varphi : \mathcal{M} \to \varphi(\mathcal{M}) = \{x \in H_1 : \|x\| < \alpha\})$ і основним тензором, індукованим вкладенням $\mathcal{M} \subset H$.

***Теорема* 4.3.** *Функція $u(q) = u_1(q)$ буде розв'язком наступної крайової задачі на області $G_2 \subset B_1$ в гільбертовому просторі H_1*

$$\operatorname{div}_{G_2}\Bigg(\frac{(4+\|q\|^2)^2}{16}\,\overline{\mathbf{grad}}_{G_2}\,u(q)-$$

$$-3\frac{1152-656\|q\|^2+76\|q\|^4+3\|q\|^6}{256(4-\|q\|^2)^2}(\overline{\mathbf{grad}}_{G_2}\,u(q),q)q\Bigg)-$$

$$-a(q)u(q)=f(q),$$

$$\gamma_2(u)=\varphi,$$

де $f \in L^2(G_2); a \in C(G_2); a(q) \geqslant \alpha > 0; \varphi \in \operatorname{Im}\gamma_2,$
в тому і тільки тому випадку, коли функція $u(p) = u_2(p) \triangleq u_1(F(p))$ буде розв'язком наступної задачі Діріхле на області $G_1 = F^{-1}(G_2)$ на рімановому многовиді $\mathcal{M}$:

$$\Delta_{G_1}u-(a\circ F)u=f\circ F,$$

$$\gamma_1(u)=\varphi\circ F.$$

РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ

1.1 Деякі означення та результати класичної ріманової геометрії

1.1.1 Означення ріманового многовиду

Нехай $\mathcal{M}$ — гладкий n-мірний дійсний многовид. Під гладкістю всюди в скінченновимірному випадку розуміємо C^{∞}-гладкість. Через $T_p\mathcal{M}$ позначимо дотичний до $\mathcal{M}$ простір в точці $p \in \mathcal{M}$. Через $C^{\infty}(\mathcal{M})$ і $C_v^{\infty}(\mathcal{M})$ позначимо, відповідно, гладкі функції та гладкі векторні поля на $\mathcal{M}$. В [17] ріманів многовид визначається наступним чином.

Нехай на $\mathcal{M}$ задано тензорне поле g типу $(2,0)$, тобто білінійне відображення

$$g : C_v^{\infty}(\mathcal{M}) \times C_v^{\infty}(\mathcal{M}) \to C^{\infty}(\mathcal{M})$$

над кільцем $C^{\infty}(\mathcal{M})$. Якщо g задовольняє умови

$$g(X,Y) = g(Y,X), \tag{1.1}$$

$$(g(X,X))(p) > 0 \tag{1.2}$$

для всіх $X, Y \in C_v^{\infty}(\mathcal{M})$ і для всіх p, де $X(p) \neq 0$, то g називається *основним тензором*, або *метричним тензором* на $\mathcal{M}$. *Рімановим многовидом* називається об'єкт, що складається з гладкого многовиду і заданого на ньому метричного тензора. Умова (1.1) є умовою симетричності метричного тензора, умова (1.2) — його додатня визначеність.

Заданий основний тензор дозволяє ввести на дотичних просторах $T_p\mathcal{M}$ скалярний добуток наступним чином. Нехай $\xi_1, \xi_2 \in T_p\mathcal{M}$, тоді $(\xi_1, \xi_2) = (g(X,Y))(p)$, де $X, Y \in C_v^{\infty}(\mathcal{M})$ такі, що $X(p) = \xi_1$ і $Y(p) = \xi_2$. Завдяки умовам (1.1) і (1.2) наведений вираз буде дійсно скалярним добутком.

1.1.2 Ізометричне відображення. Існування метричного тензора

Диференційовне відображення між рімановими многовидами $f : \mathcal{M}_1 \to \to \mathcal{M}_2$ називається *ізометричним*, якщо для всіх $p \in \mathcal{M}_1$ і всіх $\xi_1, \xi_2 \in \in T_p\mathcal{M}_1$ виконується

$$(\xi_1, \xi_2) = (f'(p)\xi_1, f'(p)\xi_2),$$

де $f'(p) : T_p\mathcal{M}_1 \to T_{f(p)}\mathcal{M}_2$ — похідна диференційовного відображення f в точці $p \in \mathcal{M}_1$.

В [17], використовуючи апарат ізометричних відображень та розбиття одиниці, доведено існування метричного тензора для довільного (скінченновимірного) гладкого многовиду.

Теорема 1.1. *На кожному гладкому многовиді існує метричний тензор.*

1.1.3 Ріманова зв'язність

Відповідно до [17], лінійна зв'язність ∇ на $\mathcal{M}$ називається *рімановою зв'язністю*, якщо для кожного диференційного шляху $c : [a, b] \to \mathcal{M}$ і будь-яких двох паралельних векторних полів X, Y вздовж c функція (X, Y) стала.

В [17] доведена наступна теорема.

Теорема 1.2. $\mathcal{M}$ *— ріманів многовид; ∇ — лінійна зв'язність на $\mathcal{M}$. Зв'язність ∇ є рімановою в тому і тільки в тому випадку якщо для всіх векторних полів $X, Y, Z \in C_v^\infty(\mathcal{M})$ виконується рівність*

$$Z(X, Y) = (\nabla_Z X, Y) + (X, \nabla_Z Y).$$

Умова $Z(X, Y) = (\nabla_Z X, Y) + (X, \nabla_Z Y)$, яка ще називається тотожністю Річчі, рівносильна до умови $\nabla g = 0$, тобто паралельності метричного тензора g відносно лінійної зв'язності ∇.

В [27] лінійну зв'язність, яка задовольняє тотожність Річчі, називають *узгодженою з метрикою (метричним тензором)* g.

1.1.4 Зв'язність Леві–Чивіти

Зв'язністю Леві–Чивіти називається така ріманова зв'язність ∇, яка не має кручення, тобто для якої виконується умова

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$$

для всіх $X, Y \in C_v^\infty(\mathcal{M})$.

Відповідно до [27], лінійна зв'язність, яка не має кручення, називається *симетричною*, а зв'язність Леві–Чивіти, відповідно, є симетричною зв'язністю, узгодженою з рімановою структурою.

Зв'язність Леві–Чивіти інколи (наприклад в [27]) називають *рімановою зв'язністю*, що не слід плутати з означенням ріманової зв'язності [17], наведеним вище.

Відомі [17; 23; 27] існування та єдиність зв'язності Леві–Чивіти.

Теорема 1.3 (Леві–Чивіта)**.** *На $\mathcal{M}$ існує одна і тільки одна лінійна зв'язність ∇, що задовольняє умови*

$$Z(X, Y) = (\nabla_Z X, Y) + (X, \nabla_Z Y),$$

$$\nabla_X Y = \nabla_Y X + [X, Y]$$

для всіх $X, Y, Z \in C_v^\infty(\mathcal{M})$.

В [23; 27] доведена наступна теорема.

Теорема 1.4. *∇ — зв'язність Леві–Чивіти на $\mathcal{M}$ в тому і тільки тому разі, коли для всіх $X, Y, Z \in C_v^\infty(\mathcal{M})$ виконується*

$$2(\nabla_X Y, Z) = X(Y, Z) + Y(X, Z) - Z(X, Y) +$$

$$+([X, Y], Z) + ([Z, X], Y) + (X, [Z, Y]).$$

1.1.5 Повнота

Відповідно до [23], ріманів многовид $\mathcal{M}$ (або метричний тензор g на $\mathcal{M}$) повний, якщо зв'язність Леві–Чивіти повна, тобто кожна геодезична в $\mathcal{M}$ може бути продовжена до довільно великих значень її канонічного параметра.

В [23] доведені теореми і наслідки.

Теорема 1.5. *Для зв'язного ріманового многовиду $\mathcal{M}$ такі умови взаємно еквівалентні:*

(1) *$\mathcal{M}$ — повний ріманів многовид;*

(2) *$\mathcal{M}$ — повний метричний простір відносно внутрішньої метрики ρ;*

(3) *кожна обмежена підмножина із $\mathcal{M}$ (відносно ρ) є передкомпактом;*

(4) *для довільної точки p із $\mathcal{M}$ і довільної кривої C дотичного простору $T_p\mathcal{M}$ (або, точніше, афінного дотичного простору $A_p\mathcal{M}$), що виходить з початку, існує крива τ в $\mathcal{M}$, що виходить з p, яка разгортається на криву C.*

Теорема 1.6. *Якщо $\mathcal{M}$ — зв'язний повний ріманів многовид, то будь-які дві точки p і q з $\mathcal{M}$ з'єднуються мінімізуючою геодезичною.*

Наслідок 1.1. *Якщо всі геодезичні, що виходять із будь-якої обраної точки p зв'язного ріманового многовиду $\mathcal{M}$, нескінченно продовжуються, то $\mathcal{M}$ повний.*

Наслідок 1.2. *Кожний компактний ріманів многовид повний.*

1.1.6 Лапласіан на рімановому многовиді

Лапласіан на скінченновимірному рімановому многовиді розглядається, зокрема, в [50].

Означення 1.1. Нехай f — функція класу C^k, $k \geqslant 1$ на $\mathcal{M}$. *Градієнтом* функції f є векторне поле $\mathbf{grad}\, f$ таке, що для всіх $p \in \mathcal{M}$, $\xi \in T_p\mathcal{M}$ виконується тотожність

$$(\mathbf{grad}\, f, \xi) = \xi f,$$

де ξf — похідна функції f вздовж вектора ξ.

$\mathbf{grad}\, f$ є векторним полем класу C^{k-1}.

Для функцій f і h виконується

$$\mathbf{grad}(f + h) = \mathbf{grad}\, f + \mathbf{grad}\, h,$$

$$\mathbf{grad}(fh) = h(\mathbf{grad}\, f) + f(\mathbf{grad}\, h).$$

Означення 1.2. Нехай $\mathbf{X}$ — векторне поле класу C^k, $k \geqslant 1$ на $\mathcal{M}$. *Дивергенцією* поля $\mathbf{X}$ є функція $\operatorname{div}\mathbf{X}$ така, що для всіх $p \in \mathcal{M}$, $\xi \in$ $\in T_p\mathcal{M}$ виконується тотожність

$$(\operatorname{div}\mathbf{X})(p) = \operatorname{Tr}(\xi \mapsto \nabla_\xi \mathbf{X}),$$

де ∇ — зв'язність Леві–Чивіти.

$\operatorname{div}\mathbf{X}$ є функцією класу C^{k-1}.

Для векторних полів $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ і функції f виконується

$$\operatorname{div}(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \operatorname{div}\mathbf{X} + \operatorname{div}\mathbf{Y},$$

$$\operatorname{div}(f\mathbf{X}) = f(\operatorname{div}\mathbf{X}) + (\mathbf{grad}\, f, \mathbf{X}).$$

Означення 1.3. Нехай f — функція класу C^k, $k \geqslant 2$ на $\mathcal{M}$. *Лапласіаном* функції f є наступна функція Δf

$$\Delta f = \operatorname{div}(\mathbf{grad}\, f).$$

Δf є функцією класу C^{k-1}; для функцій f і h виконується

$$\Delta(f + h) = \Delta f + \Delta h,$$

$$\operatorname{div}(h(\mathbf{grad}\, f)) = h(\Delta f) + (\mathbf{grad}\, h, \mathbf{grad}\, f),$$

$$\Delta(fh) = h(\Delta f) + 2(\mathbf{grad}\, f, \mathbf{grad}\, h) + f(\Delta h).$$

1.2 Деякі сучасні результати ріманової геометрії

1.2.1 Існування та єдиність розв'язків еліптичних рівнянь

Нехай $\mathcal{M}$ — гладкий повний зв'язний ріманів многовид розмірності $d < \infty$. Позначимо через $C_0^\infty(\mathcal{M})$ клас всіх гладких функцій над $\mathcal{M}$ з компактним носієм; через $W_{\mathrm{loc}}^{p,1}(\sigma)$ і $L_{\mathrm{loc}}^{\alpha}(\sigma)$ — класи всіх таких функцій f, що ζf, відповідно, лежить в класі Соболєва $W^{p,1}(\sigma)$ або в просторі $L^\alpha(\sigma)$ для будь-якої функції $\zeta \in C_0^\infty(\mathcal{M})$.

Нехай $\lambda_{\mathcal{M}}$ — ріманів об'єм на $\mathcal{M}$. Тензор Річчі позначимо Ric.

Нехай $o \in \mathcal{M}$ — фіксована точка і $\varrho(x) \triangleq \varrho(x, o)$ — ріманова відстань (внутрішня метрика). Множина зрізу $\mathrm{cut}(o)$ складається з точок x з тією властивістю, що існує такий одиничний вектор $\mathbf{X} \in \in T_o\mathcal{M}$, що $t = \varrho(o, \exp(t\mathbf{X}))$ в точності тоді, коли $t \in [0, \varrho(o, x)]$, де exp — експоненційне відображення (див., наприклад, [23]).

Визначимо оператор $L_{\mathbf{Z}}$:

$$L_{\mathbf{Z}}\varphi \triangleq \Delta\varphi + (\mathbf{Z}, \nabla\varphi),$$

де Δ — оператор Лапласа–Бертрамі, тобто, $\Delta\varphi = \operatorname{div} \nabla\varphi$.

В роботі [47] досліджено рівняння $L_{\mathbf{Z}}^*\mu = 0$ і отримані деякі достатні умови існування розв'язку. Доведено такі теореми.

Теорема 1.7. *Нехай вимірне векторне поле $\mathbf{Z}$ на $\mathcal{M}$ таке, що $\|\mathbf{Z}\| \in \in L_{\mathrm{loc}}^{\alpha}(\lambda_{\mathcal{M}})$, де $\alpha > d$, причому існує така функція $F \in C^2[0, \infty)$, що*

$$\lim_{r\to\infty} F(r) = \infty \text{ і } \lim_{r\to\infty} \sup_{\{\varrho \geqslant r\}\setminus \mathrm{cut}(o)} (F'(\varrho)L_{\mathbf{Z}}\varrho + F''(\varrho)) = -\infty,$$

де $\sup \varnothing = -\infty$. Тоді знайдеться стохастична міра μ, що задовольняє рівняння $L_{\mathbf{Z}}^*\mu = 0$ і має щільність $q \in W_{\mathrm{loc}}^{\alpha,1}(\lambda_{\mathcal{M}})$.

Наведемо достатню умову існування в термінах кривизни. Для поля $\mathbf{Z}$ класу C^1 покладемо

$$k(r) = \inf_{\{\varrho \geqslant r\}\setminus \mathrm{cut}(o)} (\mathrm{Ric}(\nabla\varrho, \nabla\varrho) - (\nabla_{\nabla\varrho}\mathbf{Z}, \nabla\varrho))$$

і

$$\overline{k}(r) = \inf_{\{\varrho\geqslant r\}\setminus\mathrm{cut}(o)} (-(\nabla_{\nabla\varrho}\mathbf{Z}, \nabla\varrho)).$$

Теорема 1.8. *Нехай поле класу C^1 таке, що*

$$\int\limits_0^\infty k(r)\,dr = \infty.$$

Тоді знайдеться стохастичне рішення μ рівняння $L^*_{\mathbf{Z}}\mu = 0$. Якщо кривизна Річчі обмежена знизу, то це вірно, якщо умова теореми виконана для $\overline{k}$.

Визначимо оператор $\mathcal{L}_{A,b}$:

$$\mathcal{L}_{A,b}\varphi \triangleq \sum_{i,j\leqslant d} \partial_{x_i}(a^{i,j}\partial_{x_j}\varphi) + \sum_{i\leqslant d} b^i\partial_{x_i}\varphi.$$

В роботі [49] досліджується існування стохастичних роз'язків рівняння $\mathcal{L}_{A,b}\nu = 0$ на $\mathcal{M}$ в термінах симетричних операторів.

Нехай μ — стохастична міра на $\mathcal{M}$ з додатньою щільністю $\varrho_\mu \in W^{p,1}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{M}), p > d$. Нехай борелівське поле $\mathbf{X}$ на $\mathcal{M}$ таке, що $\|\mathbf{X}\| \in L^2(\mu)$, причому існують такі $\varepsilon \in (0,1), \alpha > 0, c > 0$, що

$$\left|\int\limits_{\mathcal{M}} (\mathbf{X}, \nabla f) g\,d\mu\right| \leqslant c\|f\|_{W^{2,1}(\mu)}\|g\|_{W^{2,1}(\mu)}, \quad f, g \in C_0^\infty(\mathcal{M}),$$

$$\int\limits_{\mathcal{M}} (\mathbf{X}, \nabla f)\,d\mu \geqslant -\varepsilon \int\limits_{\mathcal{M}} \|\nabla f\|^2\,d\mu - a\int\limits_{\mathcal{M}} f^2\,d\mu, \quad f \in C_0^\infty(\mathcal{M}).$$

Наведені умови виконуються, якщо b обмежено, а також якщо для μ виконується логарифмічна нерівність Соболєва

$$\int\limits_{\mathcal{M}} f^2 \ln(|f|/\|f\|_{L^2(\mu)})\,d\mu \leqslant \lambda \int\limits_{\mathcal{M}} \|\nabla f\|^2\,d\mu, \quad f \in C_0^\infty(\mathcal{M}),$$

причому $\exp(\alpha|b|^2) \in L^1(\mu)$ при $\alpha > \lambda + 1$.

Теорема 1.9. *Нехай* $c_1 \cdot \mathrm{I} \leqslant A \leqslant c_2 \cdot \mathrm{I}$ *при деяких* $c_1, c_2 > 0$, *причому в локальних картах матричні елементи* A *входять в* $W^{p,1}_{\mathrm{loc}}$. *Припустимо, що вкладення* $W^{2,1}(\mu) \to L^2(\mu)$ *компактне. Тоді існує додатня функція* $\psi \in L^2(\mu)$, *для якої міра* $\nu = \psi \cdot \mu$ *задовольняє рівняння* $\mathcal{L}^*_{A,b}\nu = 0$.

Наведені вимоги виконуються, якщо μ задовольняє логарифмічну нерівність Соболєва і $\exp(\alpha|b|^2) \in L^1(\mu)$ при $\alpha > \lambda + 1$.

В [47] доведені наступні теореми про єдиність розв'язку.

Теорема 1.10. *Нехай* $\mathbf{Z} = \nabla U$, *де* $U \in W^{\alpha,1}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{M}) \cap L^\infty_{\mathrm{loc}}(\lambda_{\mathcal{M}})$ *при деякому* $\alpha > d$. *Припустимо, що існує така невід'ємна функція* $V \in C^2(\mathcal{M})$, *що множини* $\{C \leqslant c\}$ *компактні при* $c < \sup_{\mathcal{M}} V$ *і покривають* $\mathcal{M}$, *причому існує такий компакт* K, *що* $L_{\mathbf{Z}} V \leqslant -1$ *повз* K. *Тоді* $\exp U \in L^1(\lambda_{\mathcal{M}})$. *Якщо* $\mathcal{M}$ *зв'язний, то нормована міра* $\mu = C \exp U \cdot \lambda_{\mathcal{M}}$ *є єдиним стохастичним розв'язком рівняння* $L^*_{\mathbf{Z}}\mu = 0$.

Теорема 1.11. *Нехай* $\mathcal{M}$ *зв'язний, кривизна Річчі обмежена знизу і* $\inf\limits_{x \in \mathcal{M}} \lambda_{\mathcal{M}}\big(B(x,r)\big) > 0$ *при всіх* $r > 0$, *де* $B(x,r)$ *— геодезична куля. Нехай* μ *— така борелівська стохастична міра на* $\mathcal{M}$, *що* $L^*_{\mathbf{Z}}\mu = 0$, *де* $\|\mathbf{Z}\| \in L^2(\mu)$, *причому* $\mathbf{Z} = \nabla U, U \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$. *Тоді* $\exp U \in L^1(\lambda_{\mathcal{M}})$, *причому* $\mu = \|\exp U\|^{-1}_{L^1(\lambda_{\mathcal{M}})} \exp U \cdot \lambda_{\mathcal{M}}$.

1.2.2 Оцінка розв'язків еліптичних рівнянь

В [47; 48] доведена наступна теорема.

Теорема 1.12. *Нехай* $\mathcal{M}$ *— такий ріманів многовид з рімановою мірою об'єму* λ, *що кривизна Річчі обмежена знизу і ріманові об'єми куль будь-якого фіксованого додатнього радіусу відділені від нуля. Нехай* μ *— борелівська стохастична міра на* $\mathcal{M}$ *і* $L^*\mu = 0$, *де* $Lf = \Delta f + (b, \nabla f)$ *і* $\|b\| \in L^2(\mu)$. *Тоді* $\mu = \varrho \cdot \lambda$, *де* $\sqrt{\varrho} \in W^{2,1}(\mathcal{M})$, *причому*

$$\int\limits_{\mathcal{M}} \frac{\|\nabla \varrho\|^2}{\varrho^2}\, d\mu \leqslant \int\limits_{\mathcal{M}} \|b\|^2\, d\mu.$$

Якщо замість $\|b\| \in L^2(\mu)$ *ми маємо* $\|b\| \in L^2(\lambda)$, *то*

$$\int\limits_{\mathcal{M}} \frac{\|\nabla \varrho\|^2}{\varrho^2}\, d\lambda \leqslant \int\limits_{\mathcal{M}} \|b\|^2\, d\lambda.$$

1.2.3 Рівняння Фоккера–Планка на рімановому многовиді

До сучасних досліджень диференційних рівнянь на ріманових многовидах варто також віднести роботи [53; 60], присвячені рівнянню Фоккера–Планка. В роботі [60] будується варіаційна апроксимація рівняння Фоккера–Планка на рімановому многовиді. Основний результат роботі [53] — теореми монотонності і стійкості для W-ентропії Перельмана рівняння Фоккера–Планка на повному рімановому многовиді з невід'ємною m-мірною кривизною Бекрі–Емері Річчі.

1.3 Диференційовні міри

Теорія диференційовних мір була запропонована С. В. Фоміним на Міжнародному конгресі математиків в 1966 р. (див. [1; 2; 37–40]). Саме С. В. Фомін усвідомив, що в нескінченновимірному аналізі при побудові нескінченновимірного аналога теорії узагальнених функцій замість пари просторів (пробні функції — узагальнені функції) природно розглядати чотири простори: деякий простір функцій S, його спряжений S', деякий простір мір M і його спряжений M'. В скінченновимірному випадку M ототожнюється з S завдяки мірі Лебега, існування якої робить можливим представлення міри через її щільність. Відсутність інваріантної відносно зсувів ненульової міри робить в нескінченновимірному просторі таке представлення неможливим.

Розглянемо X — локально опуклий лінійний топологічний простір, X' — його спряжений простір, $\mathfrak{A}$ — деяка σ-алгебра його підмножин, μ — визначена на $\mathfrak{A}$ міра (взагалі кажучи, знакозмінна).

Означення 1.4. Міра μ називається диференційовною на множині

$A \in \mathfrak{A}$ за напрямом $h \in X$ (за Фоміним), якщо для будь-якого $t \in \mathbb{R}$ виконується $A + th \in \mathfrak{A}$ і існує наступна межа

$$\lim_{t \to 0} \frac{\mu(A + th) - \mu(A)}{t},$$

значення якої називається диференціалом (похідною) міри μ за Фоміним (або сильною похідною) (на множині A) при прирості h і позначається одним із наступних символів:

$$d_h\mu(A),\ d_\mu h(A) \text{ або } \mu'(A)h.$$

Означення 1.5. Міра μ називається диференційовною за напрямом $h \in$ $\in X$ (за Фоміним), якщо вона диференційовна за напрямом h на кожній множині $A \in \mathfrak{A}$.

Диференціал $d_h\mu$ диференційовної за напрямом h за Фоміним міри μ є послідовність знакозмінних мір (σ-адитивних функцій), а тому, за теоремою Нікодима (див. [21, с. 176–177]), $d_h\mu$ теж є знакозмінною мірою. Більш того, міра $\nu = d_h\mu$ є абсолютно неперервною відносно міри μ, а відповідну похідну Радона–Нікодима $\frac{d\nu}{d\mu}$ називають логарифмічною похідною міри μ уздовж h.

Означення 1.6. Другим диференціалом міри μ при прирості (h_1, h_2) назвемо диференціал при прирості h_2 диференціала $d\mu h_1$ міри μ при прирості h_1 і позначимо символом $d^{(2)}_{h_1,h_2}\mu$ або $d^2\mu h_1 h_2$, а саму міру μ, для якої він існує, назвемо двічі диференційовною за напрямом (h_1, h_2)

n-й диференціал міри μ при прирості $(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ визначимо за індукцією:

$$d^{(n)}_{h_1 \ldots h_n}\mu \equiv d^{(n)}\mu h_1 \ldots h_n \triangleq d_{h_n}(d_{h_1 \ldots h_{n-1}}\mu),$$

а міру μ назвемо диференційовною за напрямом $(h_1, \ldots, h_n)$.

У випадку скінченновимірного простору $\mathbb{R}^m$ кожна абсолютно неперервна відносно міри Лебега міра є диференційовною за всіма напрямками. Відомий ([1, с. 153, Пропозиція 3.1.1]) зворотній факт.

Теорема 1.13. *Нехай $\{h_1, \ldots, h_m\}$ — базис в m-мірному просторі $\mathbb{R}^m$ і μ — борелівська міра в $\mathbb{R}^m$. Якщо міра μ диференційовна уздовж кожного із напрямів $h_1, \ldots, h_m$, то вона абсолютно неперервна відносно міри Лебега λ_m.*

Зв'язок між нескінченно диференційовною щільністю відносно міри Лебега і нескінченною диференційовністю відносно всіх напрямків наведений в [6, с. 110, пропозиція 3.4.3].

Теорема 1.14. *Нехай $\{h_1, \ldots, h_m\}$ — базис в m-мірному просторі $\mathbb{R}^m$ і μ — борелівська міра в $\mathbb{R}^m$. Міра μ є нескінченно диференційовною відносно векторів $\{h_1, \ldots, h_m\}$ в тому і тільки тому випадку, коли її узагальнені частинні похідні представляються інтегровними функціями, інакше кажучи,*

$$\mu = \alpha \lambda_m,$$

де $\alpha \in W_1^1(\mathbb{R}^m)$ — клас Соболева, що містить всі такі інтегровні функції, узагальнені похідні яких теж є інтегровними.

Отже, у скінченновимірному випадку аналіз гладких мір зводиться до класичного аналізу узагальнених функцій, тобто, дослідження диференційовних мір є суттєво змістотним саме у нескінченновимірному випадку.

Інше означення диференційовності мір на сепарабельному гільбертовому просторі було запропоновано А. В. Скороходом у роботі [34]. В роботі [6] означення узагальнено на випадок локально опуклого простору.

Означення 1.7. Борелівська міра μ на локально опуклому просторі X називається диференційовною (за Скороходом) уздовж напрямку h, якщо для кожної функції $f \in C_b(X)$ відображення

$$t \longmapsto \int\limits_X f(x - th)\, \mu(dx)$$

є диференційовним.

В [7] доведена наступна теорема про існування міри–диференціала за Скороходом.

Теорема 1.15. *Нехай радонівська міра μ на локально опуклому просторі X диференційовна за Скороходом уздовж напрямку $h \neq 0$. Тоді існує радонівська міра ν, для якої для всіх $f \in C_b(X)$ виконується тотожність*

$$\lim_{t \to 0} \int\limits_X \frac{f(x - th) - f(x)}{t} \, \mu(dx) = \int\limits_X f(x) \, \nu(dx).$$

Міру ν будемо називати диференціалом (похідною) за Скороходом (або слабкою похідною) міри μ уздовж напрямку h.

В [6] доведено наступний інтегральний критерій диференційовності радонівської міри за Скороходом.

Теорема 1.16. *Радонівська міра μ на локально опуклому просторі X диференційовна за Скороходом уздовж напрямку h тоді і тільки тоді коли існує така радонівська міра ν, що для кожної $A \in \mathcal{B}(X)$ виконується рівність*

$$\mu(A + th) - \mu(A) = \int\limits_0^t \nu(A + sh) \, ds,$$

причому ν — похідна міри μ за Скороходом уздовж напрямку h.

Наслідок 1.3. *Диференційовна за Фоміним радонівська міра є диференційовною за Скороходом, і слабка похідна міри в такому випадку співпадає з її сильною похідною.*

Обернений наслідок, як показано в [6], має місце за умови неперервності слабкої похідної відносно вихідної міри.

Теорема 1.17. *Радонівська міра μ на локально опуклому просторі X, диференційовна за Скороходом уздовж напрямку h, є диференційовною за Фоміним уздовж h в тому і тільки тому випадку, коли її слабка похідна абсолютно неперервна відносно міри μ.*

Також у роботі [7] отримано критерій диференційовності міри μ через ліпшицевість функції $t \mapsto \mu(A + th)$.

Теорема 1.18. *Радонівська міра μ на локально опуклому просторі X є диференційовною за Скороходом уздовж напрямку h в тому і тільки тому випадку, коли для кожної $A \in \mathcal{B}(X)$ існує таке число $c(A)$, що для всіх значень $t \in [-1, 1]$ має місце нерівність*

$$|\mu(A + th) - \mu(A)| \leqslant c(A)|t|.$$

Тоді числа $c(A)$ можна обрати рівномірно обмеженими.

Природним узагальненням диференційовності міри за напрямком є, зокрема, диференційовність міри уздовж векторного поля, що була уведена Ю. Л. Далецьким у роботі [18]. Розглянемо в сепарабельному банаховому просторі X гладке векторне поле $\mathbf{Z} : X \to X$, для якого $\sup\limits_{x \in X} \|\mathbf{Z}'(x)\| < \infty$. Нехай Φ_t — глобальний інтегральний потік поля $\mathbf{Z}$. Для борелівської міри μ при кожному $t \in \mathbb{R}$ позначимо

$$\mu_t \triangleq \mu \circ \Phi_{-t}.$$

Означення 1.8. Міра μ називається диференційовною уздовж векторного поля $\mathbf{Z}$, якщо існує міра $D_{\mathbf{Z}}\mu = -\frac{d}{dt}\mu_t\big|_{t=0}$ — похідна міри μ уздовж поля $\mathbf{Z}$ у тому сенсі, що для кожної функції $\varphi \in C_b^1(X)$ виконується рівність

$$\int\limits_X \varphi(x)\,(D_{\mathbf{Z}}\mu)(dx) = -\int\limits_X (D_{\mathbf{Z}}\varphi)(x)\,\mu(dx).$$

Більшим узагальненням є розгляд довільних вимірних перетворень замість зсувів мір, що розглядається, зокрема, у роботах О. Г. Смолянова та H. Weizsaecker [57; 58].

1.4 Висновки до розділу 1

У розділі проведено огляд робіт, що мають відношення до теми дисертаційного дослідження. Наведено огляд класичних результатів ріманової геометрії, що стосуються предмету дослідження: означення ріманового многовиду, існування метричного тензора, ріманова зв'язність, зв'язність Леві–Чивіти і повнота ріманового многовиду. Проведено огляд ряду сучасних робіт з ріманової геометрії, присвячених еліптичним рівнянням на ріманових многовидах. Розглянуто диференційовність за Фоміним та за Скороходом уздовж напрямків, диференційовність уздовж векторних полів, визначено зв'язок між ними.

РОЗДІЛ 2. РІВНОМІРНІ РІМАНОВІ МНОГОВИДИ

2.1 Постановка задачі

Мета цього розділу — дослідження нескінченновимірних ріманових многовидів з метою отримання додаткових умов, що забезпечують їх метричну повноту, та наведення прикладів таких многовидів. Метрична повнота забезпечує існування глобальних потоків векторних полів класу $C^1_{b;v}(\mathcal{M})$ ([25, с. 96]), що знадобиться нам в подальших дослідженнях.

2.2 Ріманові многовиди

Нехай $\mathcal{M}$ — гладкий дійсний гільбертів многовид класу C^2 з модельним простором H. Через $T_p\mathcal{M}$ знову позначимо дотичний до $\mathcal{M}$ простір в точці $p \in \mathcal{M}$.

Нехай на $\mathcal{M}$ задано g — гладке симетричне строго додатньо визначене тензорне поле типу $(2,0)$. В кожній точці $p \in \mathcal{M}$ тензор g_p є симетричним білінійним обмеженим відображенням $g_p : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$. Тобто:

– для будь-яких точки $p \in \mathcal{M}$ і карти (U, φ) в точці p існує таке $\delta^\varphi > 0$, що для будь-яких векторів ξ_1, ξ_2 з простору $T_p\mathcal{M}$:

$$g_p(\xi_1, \xi_2) = g_p(\xi_2, \xi_1); g_p(\xi_1, \xi_1) \geqslant \delta^\varphi \|\xi_1^\varphi\|_H^2,$$

– для будь-яких області G в $\mathcal{M}$ і гладких векторних полів $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ на G:

$$g_q(\mathbf{X}_q, \mathbf{Y}_q) \text{ — функція класу } C^1 \text{ на } G \text{ аргумента } q.$$

Таке поле g називається *основним тензором* або *метричним тензором* на $\mathcal{M}$.

Означення 2.1. *Рімановим многовидом* будемо називати об'єкт, що складається з гладкого гільбертового многовиду і заданого на ньому метричного тензора.

Заданий метричний тензор дозволяє визначити внутрішній (скалярний) добуток для векторів ξ_1, ξ_2 з простору $T_p\mathcal{M}$:

$$(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1, \xi_2)_p \triangleq g_p(\xi_1, \xi_2).$$

Введений на $T_p\mathcal{M}$ скалярний добуток дозволяє природним чином ввести довжину кусково гладкого шляху $c : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathcal{M}$:

$$L_c(t) \triangleq \int\limits_{\alpha}^{t} \|\dot{c}(\tau)\|_{c(\tau)}\, d\tau; L(c) \triangleq L_c(\beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \|\dot{c}(\tau)\|_{c(\tau)}\, d\tau.$$

На зв'язному рімановому многовиді можна ввести внутрішню метрику:

$$\rho(p, q) \triangleq \inf\left\{L(c)\middle|c(\alpha) = p, c(\beta) = q\right\},$$

де $c : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathcal{M}$ — кусково гладкі шляхи, що поєднують точки p та q.

2.3 Означення рівномірного ріманового многовиду

Означення 2.2. Атлас $\Omega = \{(\varphi, U_\varphi)\}$ $(\varphi : U_\varphi \longrightarrow H)$ будемо називати *рівномірним*, якщо існують такі $r > 0, \delta^-, \delta^+ > 0$, що

1) для кожної точки $p \in \mathcal{M}$ існує така карта (φ_p, U_p), що $\varphi_p(U_p) \supset$ $\supset B_r(\varphi_p(p))$, де $B_r(\varphi_p(p)) \triangleq \{q \in H : \|\varphi_p(p) - q\| < r\}$.

2) для кожних $p \in \mathcal{M}, q \in U_p, \xi \in T_q\mathcal{M}$ виконується $\delta^-\|\xi^{\varphi_p}\|^2 \leqslant$ $\leqslant \|\xi\|_H^2 \leqslant \delta^+\|\xi^{\varphi_p}\|^2$ для карти (φ_p, U_p) з пункту 1).

Ріманів многовид із зафіксованим на ньому рівномірним атласом будемо називати *рівномірним*.

Зауваження 2.1. *Наведене означення відрізняється від рівномірності атласу банахових многовидів, що введена в [19; 25]. Однак, як зауважено в [8], рівномірність банахового многовиду також дозволяє отримати повноту запропонованої в [8] метрики.*

2.4 Метрична повнота рівномірного ріманового многовиду

Лема 2.1. *Нехай $\mathcal{M}$ — рівномірний ріманів многовид, p і q — точки в $\mathcal{M}$, $R \in (0, r]$. Нехай також виконується нерівність $\rho(p, q) < R\delta^-$. Тоді*

$$q \in U_p, \varphi_p(q) \in B_R(\varphi_p(p)) \subset \varphi_p(U_p).$$

r і δ^- — константи з означення 2.2, а (φ_p, U_p) — карта з пункту 1) означення 2.2.

Доведення. $B_R(\varphi_p(p)) \subset \varphi_p(U_p) \Leftrightarrow \varphi_p^{-1}(B_R(\varphi_p(p))) \subset U_p$ виконується за рахунок рівномірності $\mathcal{M}$. Отже, для доведення леми достатньо показати, що $q \in \varphi_p^{-1}(B_R(\varphi_p(p)))$. Доведемо від супротивного: нехай $q \notin \varphi_p^{-1}(B_R(\varphi_p(p)))$. Для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий кусково-гладкий шлях $c : [0, 1] \longrightarrow \mathcal{M}$, який поєднує p і q ($c(0) = p, c(1) = q$), що $\rho(p, q) > L(c) - \varepsilon$. Нескладно показати, що за рахунок припущення $q \notin \varphi_p^{-1}(B_R(\varphi_p(p)))$ існує таке $\tau \in (0, 1)$, що $\varphi_p(c(\tau)) \in \partial B_R(\varphi_p(p))$ і для всіх $t \in [0, \tau]$: $c(t) \in U_p$. Тому:

$$\rho(p, q) + \varepsilon > L(c) \geqslant L_c(\tau) = \int\limits_0^\tau \|c'(t)\| \, dt \geqslant \int\limits_0^\tau \delta^- \|(\varphi_p \circ c)'(t)\| dt \geqslant$$

$$\geqslant \delta^- \|\varphi_p(c(\tau)) - \varphi_p(p)\| = \delta^- R,$$

а отже,

$$\forall \varepsilon > 0 : \rho(p, q) > \delta^- R - \varepsilon \Rightarrow \rho(p, q) \geqslant \delta^- R \text{ — протиріччя.}$$

$\square$

Лема 2.2. *Нехай* $\mathcal{M}$ *— рівномірний ріманів многовид,* p *і* q *— точки в* $\mathcal{M}$, $R \in (0, r]$. *Нехай також виконується твердження* $q \in U_p, \varphi_p(q) \in \in B_R(\varphi_p(p))$. *Тоді виконується нерівність*

$$\rho(p, q) < R\delta^+.$$

r *і* δ^+ *— константи з означення 2.2, а* (φ_p, U_p) *— карта з пункту 1) означення 2.2.*

Доведення. За рахунок рівномірності многовиду $\mathcal{M}$, $B_R(\varphi_p(p)) \subset \subset \varphi_p(U_p)$, а тому, за рахунок опуклості кулі, відрізок в H, що поєднує точки $\varphi_p(p)$ і $\varphi_p(q)$, є підмножиною $B_R(\varphi_p(p)) \subset \varphi_p(U_p)$. Значить, ми можемо коректно розглядати гладкий шлях в $\varphi_p^{-1}(B_R(\varphi_p(p))) \subset U_p \subset \mathcal{M}$ наступного вигляду:

$$c(t) = \varphi_p^{-1}((1-t)\varphi_p(p) + t\varphi_p(q)), c : [0, 1] \longrightarrow \varphi_p^{-1}(B_R(\varphi_p(p))),$$

$$c(0) = p, c(1) = q.$$

Тоді:

$$\rho(p, q) \leqslant L(c) = \int_0^1 \|c'(t)\|\, dt \leqslant \delta^+ \int_0^1 \|(\varphi_p \circ c)'(t)\|\, dt =$$

$$= \delta^+ \int_0^1 \|((1-t)\varphi_p(p) + t\varphi_p(q))'(t)\|\, dt =$$

$$= \delta^+ \int_0^1 \|\varphi_p(q) - \varphi_p(p)\|\, dt < \delta^+ R.$$

□

Твердження 2.1. *Рівномірний ріманів многовид* $\mathcal{M}$ *є метрично повним за внутрішньою метрикою.*

Доведення. Нехай $\{p_n\}$ — фундаментальна в $\mathcal{M}$ послідовність точок. Фіксуємо $R = \frac{1}{2}\frac{\delta^-}{\delta^+}$. Існує таке $N \in \mathbb{N}$, що для всіх $n, m \geqslant N$ виконується $\rho(p_n, p_m) < \delta^- R$.

Доведемо, що для всіх $n \geqslant N$ виконується $\varphi_{p_n}^{-1}(B_R(\varphi_{p_n}(p_n))) \subset \subset \varphi_{p_N}^{-1}(B_r(\varphi_{p_N}(p_N)))$. Нехай $q \in \varphi_{p_n}^{-1}(B_R(\varphi_{p_n}(p_n)))$, тоді, згідно з лемою 2.2, $\rho(p_n, q) < \delta^+ R$, а отже, враховуючи нерівність трикутника:

$$\rho(p_N, q) \leqslant \rho(p_N, p_n) + \rho(p_n, q) < \delta^- R + \delta^+ R = \frac{1}{2}\frac{\delta^-}{\delta^+} r\delta^- + \frac{1}{2}\delta^- r \leqslant \delta^- r,$$

тому, враховуючи лему 2.1,

$$q \in \varphi_{p_N}^{-1}(B_r(\varphi_{p_N}(p_N))).$$

Тепер покажемо, що послідовність $\{\varphi_{p_N}(p_n)\}_{n=N\ldots\infty}$ збіжна. По-перше, для всіх $n, m \geqslant N$ виконується $\rho(p_n, p_m) < \delta^- R$, а тому, враховуючи лему 2.1, виконується $p_m \in \varphi_{p_n}^{-1}(B_R(\varphi_{p_n}(p_n)))$. Більш того, будь-який кусково-гладкий шлях, що поєднує p_n і p_m і виходить за межі $\varphi_{p_n}^{-1}(B_R(\varphi_{p_n}(p_n)))$, має довжину, не меншу за $\delta^- R$ (див. доведення леми 2.1), а тому, для визначення $\rho(p_n, p_m)$ як інфімума довжин кусково-гладких шляхів, що поєднують p_n і p_m, достатньо розглядати лише кусково-гладкі шляхи $\tilde{c} : [0,1] \longrightarrow \varphi_{p_n}^{-1}(B_R(\varphi_{p_n}(p_n))) \subset \subset \varphi_{p_N}^{-1}(B_r(\varphi_{p_N}(p_N)) \subset U_{p_N}$:

$$\rho(p_n, p_m) = \inf_{\tilde{c}} L(\tilde{c}) = \inf_{\tilde{c}} \int\limits_0^1 \|\tilde{c}'(t)\|\, dt \geqslant \inf_{\tilde{c}} \delta^- \int\limits_0^1 \|(\varphi_{p_N} \circ \tilde{c})'(t)\|\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \inf_{\tilde{c}} \delta^- \|\varphi_{p_N}(\tilde{c}(1)) - \varphi_{p_N}(\tilde{c}(0))\| = \delta^- \|\varphi_{p_N}(p_m) - \varphi_{p_N}(p_n)\|,$$

тому, оскільки $\{p_n\}$ — фундаментальна послідовність, то послідовність $\{\varphi_{p_N}(p_n)\}_{n=N\ldots\infty}$ теж фундаментальна, а отже збіжна в $B_R(\varphi_{p_N}(p_N)) \subset \subset \varphi_{p_N}(U_{p_N}) \subset H$ за рахунок повноти гільбертового простору H та замкненості $B_R(\varphi_{p_N}(p_N))$. Тобто, існує x_0 такий, що $\varphi_{p_N}(p_n) \to x_0$.

Нарешті, доведемо, що $p_n \to p_0 \triangleq \varphi_{p_N}^{-1}(x_0)$. Візьмемо

$$c_n : [0,1] \ni t \longmapsto \varphi_{p_N}^{-1}((1-t)\varphi_{p_N}(p_n) + t\varphi_{p_N}(p_0)).$$

Тоді:

$$\rho(p_n, p_0) \leqslant L(c_n) = \int\limits_0^1 \|c_n'(t)\|\,dt \leqslant \delta^+ \int\limits_0^1 \|(\varphi_{p_N} \circ c_n)'(t)\|\,dt =$$

$$= \delta^+ \|\varphi_{p_N}(p_0) - \varphi_{p_N}(p_n)\| = \delta^+ \|x_0 - \varphi_{p_N}(p_n)\| \longrightarrow 0,$$

отже,

$$p_n \to p_0.$$

□

2.5 Дослідження топології, породженої метрикою

Оскільки в подальшому ми будемо розглядати борелівські міри, виникає закономірне питання узгодженості топології ріманова многовиду, якою він наділений як хаусдорфів простір, та топології, що породжена внутрішньою метрикою.

Твердження 2.2. *Нехай $\mathcal{M}$ — ріманів многовид, ρ — його внутрішня метрика. Тоді топологія, породжена ρ, не слабша за вихідну топологію $\mathcal{M}$.*

Доведення. Нехай $V \subset \mathcal{M}$ — відкрита у сенсі вихідної топології множина; $p \in V$ — довільна точка V. Необхідно показати, що V — відкрита в сенсі метрики ρ, тобто, існує таке число $R > 0$, що $V \supset B_R(p) = \{q : \rho(p, q) < R\}$.

В точці p існує деяка карта $(\varphi, \tilde{U})$. Тоді (φ, U), де $U \triangleq V \cap \tilde{U}$, — теж карта в p, при чому $U \subset V$. Оскільки $\varphi(U)$ — відкрита, то існує $\tilde{R} > 0$ таке, що $B_{\tilde{R}}(\varphi(p)) \subset \varphi(U)$.

З іншого боку, згідно строгій додатній визначеності метричного тензора, існує $\delta^\varphi > 0$ такий, що для будь-яких $q \in U$, $\xi \in T_q\mathcal{M}$ виконується $g_q(\xi, \xi) \geqslant \delta^\varphi \|\xi^\varphi\|_H^2$.

Тоді, аналогічно до доведення леми 2.1, $R = \tilde{R}\delta^\varphi$, і буде шуканим R. □

В тому разі, якщо в кожній точці $p \in \mathcal{M}$ існують такі карта (φ, U) та число $\delta_+^\varphi > 0$, що:

$$\forall q \in U, \xi \in T_q\mathcal{M} : g_q(\xi, \xi) \leqslant \delta_+^\varphi \|\xi^\varphi\|_H^2, \tag{2.1}$$

ми доведемо, що топологія, породжена метрикою, співпадає з вихідною. Зокрема, це виконується у випадку рівномірного ріманового многовиду.

Твердження 2.3. *Нехай $\mathcal{M}$ — ріманів многовид, ρ — його внутрішня метрика; в кожній його точці $p \in \mathcal{M}$ існують такі карта (φ, U) та число $\delta_+^\varphi > 0$, що виконується умова* (2.1)*. Тоді топологія, породжена ρ, співпадає з вихідною топологією $\mathcal{M}$.*

Доведення. Враховуючи твердження 2.2, достатньо довести, що вихідна топологія не слабкіша за ту, що породжена метрикою. Нехай $V \subset M$ — відкрита у термінах метрики множина. Доведемо, що кожна точка V буде внутрішньою в сенсі вихідної топології, тобто, входить у V разом з відкритою в сенсі вихідної топології множиною.

Нехай $p \in V$, тоді існує таке $R > 0$, що $B_R(p) \subset V$, оскільки V — відкрита у сенсі метрики.

З іншого боку, в p існують такі карта (φ, U) та число $\delta_+^\varphi > 0$, що виконується умова (2.1). Також, оскільки $\varphi(U)$ — відкрита, то існує таке $\tilde{R} > 0$, що $B_{\tilde{R}}(\varphi(p)) \subset \varphi(U)$.

Тоді, аналогічно до доведення леми 2.2, можна показати, що:

$$\varphi^{-1}(B_{\min\{\tilde{R}, \frac{R}{\delta_+^\varphi}\}}(\varphi(p))) \subset B_R(p) \subset V.$$

$\varphi^{-1}(B_{\min\{\tilde{R}, \frac{R}{\delta_+^\varphi}\}}(\varphi(p))) \ni p$ і буде шуканою відкритою у сенсі вихідної топології множиною. □

2.6 Повнота дотичного простору

За рахунок строгої додатності метричного тензора, зі збіжності (фундаментальності) послідовності векторів в дотичному просторі $T_p\mathcal{M}$ випливає збіжність (відповідно, фундаментальність) відповідної послідовності представлень векторів в модельному просторі H. Для доведення оберненої імплікації, а отже і повноти простору $T_p\mathcal{M}$, здається необхідним знову вимагати існування в точці $p \in \mathcal{M}$ таких карти (φ, U) та числа $\delta_+^\varphi > 0$, що виконується (2.1). Це виконується для кожного $p \in \mathcal{M}$ у випадку рівномірного ріманового многовиду.

Твердження 2.4. *Нехай $\mathcal{M}$ — ріманів многовид, для $p \in \mathcal{M}$ існують такі карта (φ, U) та число $\delta_+^\varphi > 0$, що виконується умова* (2.1). *Тоді дотичний простір $T_p\mathcal{M}$ буде повним.*

Доведення. Нехай $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ — фундаментальна послідовність в $T_p\mathcal{M}$, (φ, U) — така карта в точці p, що виконується (2.1). Покажемо, що послідовність $\{\xi_n^\varphi\}_{n=1}^\infty$ теж фундаментальна. Відповідно до строгої додатності ріманового тензора,

$$\|\psi^\varphi\|_H \leqslant (\delta^\varphi)^{-\frac{1}{2}} \|\psi\|_p$$

для будь-якого $\psi \in T_p\mathcal{M}$. Фіксуємо $\varepsilon > 0$. Оскільки $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ — фундаментальна послідовність в $T_p\mathcal{M}$, то існує таке N_ε, що для всіх $n, m \geqslant N_\varepsilon$ виконується

$$\|\xi_n - \xi_m\|_p \leqslant (\delta^\varphi)^{\frac{1}{2}} \varepsilon,$$

але тоді

$$\|\xi_n^\varphi - \xi_m^\varphi\|_H \leqslant (\delta^\varphi)^{-\frac{1}{2}} (\delta^\varphi)^{\frac{1}{2}} \varepsilon = \varepsilon$$

для всіх $n, m \geqslant N_\varepsilon$, що доводить фундаментальність послідовності $\{\xi_n^\varphi\}_{n=1}^\infty$ в H. Оскільки ж простір H повний, то існує таке $\xi^\varphi \in H$, що

$$\xi_n^\varphi \longrightarrow \xi^\varphi,$$

але за рахунок (2.1),

$$\|\xi_n - \xi\|_p \leqslant (\delta_+^\varphi)^{\frac{1}{2}} \|\xi_n^\varphi - \xi^\varphi\|_H \longrightarrow 0,$$

що і доводить твердження. □

2.7 Кути між підпросторами у гільбертовому просторі

Нехай H — гільбертів простір. $A, B \neq \{0\}$ — підпростори H. Введемо поняття косинуса кута між A і B.

Означення 2.3. Покладемо

$$\cos\measuredangle(A,B) \triangleq \max\left\{\inf_{y\in B\setminus\{0\}}\sup_{x\in A\setminus\{0\}}\cos\measuredangle(x,y);\inf_{x\in A\setminus\{0\}}\sup_{y\in B\setminus\{0\}}\cos\measuredangle(x,y)\right\},$$

де $\cos\measuredangle(x,y) = \frac{(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|}$ — косинус кута між векторами x і y.

Зауваження 2.2. *Наведене означення косинуса кута співпадає з традиційним поняттям кута в тръохвимірній стереометрії: між прямими, площинами та кута між прямою та площиною. Для будь-якого нетривіального підпростору $A \notin \{H, \{0\}\}$ виконується тотожність $\cos\measuredangle(A, A^{\perp}) = 0$. Також можна показати, що принаймні у скінченновимірному випадку виконується рівність $\cos\measuredangle(A,B) = \cos\measuredangle(A^{\perp}, B^{\perp})$.*

Зауваження 2.3. *Проілюструємо зв'язок між запропонованим означенням та метрикою на множині замкнених підпросторів банахового простору, що була запропонована і досліджена в [16] як модифікація поняття* розхилу*, уведеного в [24], також була досліджена в [22] і в іншій еквівалентній формі в [54]. Означення цієї метрики можна переписати в наступному вигляді для замкнених підпросторів $A, B \neq \{0\}$*

$$\hat{d}(A,B) = \max\left\{\sup_{y\in B\setminus\{0\}}\inf_{x\in A\setminus\{0\}}\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|;\sup_{x\in A\setminus\{0\}}\inf_{y\in B\setminus\{0\}}\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|\right\},$$

що у випадку гільбертового простору, враховуючи тотожність

$$\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\| = \sqrt{2-2\frac{(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|}} = \sqrt{2-2\cos\measuredangle(x,y)},$$

можна переписати як

$$\hat{d}(A,B) = \max\left\{ \sup_{y\in B\setminus\{0\}} \inf_{x\in A\setminus\{0\}} \sqrt{2-2\cos\measuredangle(x,y)}; \right.$$

$$\left. \sup_{x\in A\setminus\{0\}} \inf_{y\in B\setminus\{0\}} \sqrt{2-2\cos\measuredangle(x,y)} \right\} =$$

$$= \sqrt{2-2\min\left\{ \inf_{y\in B\setminus\{0\}} \sup_{x\in A\setminus\{0\}} \cos\measuredangle(x,y); \inf_{x\in A\setminus\{0\}} \sup_{y\in B\setminus\{0\}} \cos\measuredangle(x,y) \right\}},$$

тобто,

$$\hat{d}^2(A,B) + 2\cos\measuredangle(A,B) = 2+$$

$$+2\left| \inf_{y\in B\setminus\{0\}} \sup_{x\in A\setminus\{0\}} \cos\measuredangle(x,y) - \inf_{x\in A\setminus\{0\}} \sup_{y\in B\setminus\{0\}} \cos\measuredangle(x,y) \right|,$$

звідки випливає цікаве питання оцінки модуля в правій частині. Далі буде показано, що для підпросторів однакової скінченної корозмірності цей модуль дорівнює нулю (аналогічно можна показати, що він дорівнює нулю і для підпросторів однакової скінченної розмірності), а отже для таких підпросторів виконується тотожність

$$\cos\measuredangle(A,B) = 1 - \frac{1}{2}\hat{d}^2(A,B).$$

Введемо позначення:

$$P : H \ni h \longmapsto \operatorname{pr}_A h; \quad Q : H \ni h \longmapsto \operatorname{pr}_B h.$$

Нехай $A, B \neq \{0\}$, а x і y — ненульові вектори в A і B, відповідно. Тоді:

$$\cos\measuredangle(x,y) = \frac{(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|} = \frac{(x, \operatorname{pr}_A y + \operatorname{ort}_A y)}{\|x\|\cdot\|y\|} = \frac{(x,Py)}{\|x\|\cdot\|y\|} \leqslant \frac{\|Py\|}{\|y\|}.$$

Якщо $A^\perp \cap B \neq \{0\}$, то $\inf\limits_{y\in B\setminus\{0\}} \sup\limits_{x\in A\setminus\{0\}} \cos\measuredangle(x,y) = 0$, інакше ж, при $A^\perp \cap B = \{0\}$, $\sup\limits_{x\in A\setminus\{0\}} \cos\measuredangle(x,y) = \frac{\|Py\|}{\|y\|}$, при чому супремум досягається при $x = Py \neq 0$. В обох випадках виконується рівність

$$\inf_{y \in B \setminus \{0\}} \sup_{x \in A \setminus \{0\}} \cos \measuredangle(x, y) = \inf_{y \in B \setminus \{0\}} \frac{\|Py\|}{\|y\|}.$$

Аналогічно доводиться рівність

$$\inf_{x \in A \setminus \{0\}} \sup_{y \in B \setminus \{0\}} \cos \measuredangle(x, y) = \inf_{x \in A \setminus \{0\}} \frac{\|Qx\|}{\|x\|}.$$

Отже, маємо формулу для підпросторів $A, B \neq \{0\}$:

$$\cos \measuredangle(A, B) = \max \left\{ \inf_{y \in B \setminus \{0\}} \frac{\|Py\|}{\|y\|}; \inf_{x \in A \setminus \{0\}} \frac{\|Qx\|}{\|x\|} \right\}. \tag{2.2}$$

Лема 2.3. *Нехай $A = \{n_1, n_2, \dots n_k\}^{\perp}, B = \{m_1, m_2, \dots m_p\}^{\perp}$ — підпростори скінченної корозмірності (k і p, відповідно) в гільбертовому просторі H, при чому $k \geqslant p$ і $\{n_1, n_2, \dots n_k\}, \{m_1, m_2, \dots m_p\}$ — ортонормовані системи. Тоді:*

$$\cos \measuredangle(A, B) = \sigma_{\min}(\Gamma) = \sqrt{\lambda_{\min}(\Gamma^* \Gamma)},$$

де

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (n_1, m_1) & \dots & (n_1, m_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (n_k, m_1) & \dots & (n_k, m_p) \end{pmatrix}.$$

Доведення. Одразу зауважимо, що Γ — матриця розміру $k \times p$, а $\Gamma^*\Gamma$ — матриця розміру $p \times p$, звідки за рахунок нерівності $p \leqslant k$ випливає рівність $\sigma^2_{\min}(\Gamma) = \lambda_{\min}(\Gamma^*\Gamma)$. Якщо ж виконується рівність $p = k$, то також є справедливою рівність $\sigma^2_{\min}(\Gamma) = \lambda_{\min}(\Gamma\Gamma^*)$.

Використаємо формулу (2.2). Спочатку покажемо, що виконується рівність $\inf\limits_{x \in A \setminus \{0\}} \frac{\|Qx\|^2}{\|x\|^2} = \lambda_{\min}(\Gamma^*\Gamma)$. Позначимо $q(x) \triangleq \mathrm{pr}_{A \cap B}\, x$. Тоді $x \in H$ може бути представлений у вигляді

$$x = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j n_j + \sum_{i=1}^{p} \beta_i m_i + q(x),$$

але нас цікавлять тільки x з A:

$$x \in A \Leftrightarrow \forall j = 1 \dots k : (x, n_j) = 0 \Leftrightarrow \forall j = 1 \dots k : \alpha_j = -\sum_{i=1}^{p} \beta_i (n_j, m_i),$$

отже,

$$x = \sum_{i=1}^{p} \beta_i m_i - \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{p} \beta_i (n_j, m_i) n_j + q(x).$$

Далі знайдемо Qx:

$$Qx = x - \sum_{d=1}^{p} (x, m_d) m_d = \sum_{i=1}^{p} \beta_i m_i - \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{p} \beta_i (n_j, m_i) n_j -$$

$$-\sum_{d=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{p} \beta_i m_i - \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{p} \beta_i (n_j, m_i) n_j, m_d \right) m_d + q(x) =$$

$$= \sum_{d=1}^{p} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{p} \beta_i (n_j, m_i)(n_j, m_d) m_d - \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{p} \beta_i (n_j, m_i) n_j + q(x).$$

Введемо наступні позначення:

$$\vec{\beta} \triangleq \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix}; \quad \mathbb{A}_i \text{ — } i\text{-й рядок матриці } \mathbb{A}.$$

Тоді знайдені формули для x та Qx можуть бути переписані у наступному вигляді:

$$x = \sum_{i=1}^{p} \beta_i m_i - \sum_{j=1}^{k} (\Gamma \vec{\beta})_j n_j + q(x);$$

$$Qx = \sum_{d=1}^{p} (\Gamma^* \Gamma \vec{\beta})_d m_d - \sum_{j=1}^{k} (\Gamma \vec{\beta})_j n_j + q(x).$$

Тепер знайдемо $\|x\|^2$:

$$\|x\|^2 = \|\vec{\beta}\|^2 + \|\Gamma \vec{\beta}\|^2 - 2 \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{k} (\Gamma \vec{\beta})_j (n_j, m_i) \beta_i + \|q(x)\|^2 =$$

$$= \|\vec{\beta}\|^2 + \|\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2 - 2\|\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2 + \|q(x)\|^2 = \|\vec{\beta}\|^2 - \|\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2 + \|q(x)\|^2.$$

Аналогічно знаходиться $\|Qx\|^2$:

$$\|Qx\|^2 = \|\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2 - \|\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2 + \|q(x)\|^2.$$

Отже,

$$\inf_{x \in A\setminus\{0\}} \frac{\|Qx\|^2}{\|x\|^2} = \inf_{\|\vec{\beta}\|^2 - \|\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2 + \|q(x)\|^2 \neq 0} \frac{\|\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2 - \|\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2 + \|q(x)\|^2}{\|\vec{\beta}\|^2 - \|\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2 + \|q(x)\|^2}.$$

З розрахунку $\|x\|^2$ і $\|Qx\|^2$ випливають нерівності

$$\|\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\| \leqslant \|\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\| \leqslant \|\vec{\beta}\|, \tag{2.3}$$

з яких слідує, що $\|\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma}\| \leqslant 1$, а отже всі власні числа невід'ємноозначеної самоспряженої матриці $\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma}$ не більші за 1. Якщо виконується рівність $\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma} = \mathbb{I}$, то $\|\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\| = \|\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\| = \|\vec{\beta}\|$ при всіх $\vec{\beta}$, а тому виконується бажана рівність $\inf\limits_{x \in A\setminus\{0\}} \frac{\|Qx\|^2}{\|x\|^2} = \inf\limits_{\|q(x)\|^2 \neq 0} \frac{\|q(x)\|^2}{\|q(x)\|^2} = 1 = \lambda_{\min}(\mathbb{I}) = \lambda_{\min}(\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma})$. Далі вважаємо, що $\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma} \neq \mathbb{I}$, тобто, $\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma}$ має власні числа, менші за 1.

Далі відмітимо, що при виконанні рівності $\|\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\| = \|\vec{\beta}\|$ виконується рівність $\|x\|^2 = \|q(x)\|^2$, звідки, враховуючи нерівності $\|Qx\|^2 \leqslant \|x\|^2$ і $\|Qx\|^2 \geqslant \|q(x)\|^2$, маємо рівність $\|Qx\|^2 = \|q(x)\|^2 = \|x\|^2$ та рівність $\|\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\| = \|\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|$. Значить, для таких $x \in A \setminus \{0\}$, що виконується $\|\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\| = \|\vec{\beta}\|$, справедливі рівності $\|\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\| = \|\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\| = \|\vec{\beta}\|$ і $\frac{\|Qx\|^2}{\|x\|^2} = 1$, а оскільки для будь-яких $x \in A \setminus \{0\}$ виконується нерівність $\frac{\|Qx\|^2}{\|x\|^2} \leqslant 1$, то, розглядаючи тільки такі $\vec{\beta}$, при яких $\|\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\| \neq \|\vec{\beta}\|$ (а такі $\vec{\beta}$ існують, оскільки $\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma}$ має власні числа, менші за 1 і для відповідних власних векторів $\vec{\beta}$ виконується $\|\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\| < \|\vec{\beta}\| \Rightarrow \|\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\| \neq \|\vec{\beta}\|$), відповідний інфімум не зміниться.

Оскільки ж

$$\frac{\|Qx\|^2}{\|x\|^2} = \frac{\|\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2 - \|\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2 + \|q(x)\|^2}{\|\vec{\beta}\|^2 - \|\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2 + \|q(x)\|^2} = 1 -$$

$$- \frac{\|\vec{\beta}\|^2 - 2\|\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2 + \|\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2}{\|\vec{\beta}\|^2 - \|\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2 + \|q(x)\|^2} = 1 - \frac{\|\vec{\beta}\|^2 - 2(\vec{\beta}, \mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}) + \|\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2}{\|\vec{\beta}\|^2 - \|\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2 + \|q(x)\|^2} =$$

$$= 1 - \frac{\|\vec{\beta} - \mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2}{\|\vec{\beta}\|^2 - \|\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2 + \|q(x)\|^2} \geqslant 1 - \frac{\|\vec{\beta} - \mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2}{\|\vec{\beta}\|^2 - \|\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2} =$$
$$= \frac{\|\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2 - \|\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2}{\|\vec{\beta}\|^2 - \|\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2},$$

при чому рівність виконується при $q(x) = 0$, то справедлива формула:

$$\inf_{x\in A\setminus\{0\}} \frac{\|Qx\|^2}{\|x\|^2} = \inf_{\|\vec{\beta}\|\neq\|\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|} \frac{\|\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2 - \|\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2}{\|\vec{\beta}\|^2 - \|\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2}. \tag{2.4}$$

Аналогічно виводяться формули для $\inf\limits_{y\in B\setminus\{0\}} \frac{\|Py\|^2}{\|y\|^2}$:

$$\|\mathbb{\Gamma}\mathbb{\Gamma}^*\vec{\alpha}\| \leqslant \|\mathbb{\Gamma}\vec{\alpha}\| \leqslant \|\vec{\alpha}\|. \tag{2.5}$$

$$\inf_{y\in B\setminus\{0\}} \frac{\|Py\|^2}{\|y\|^2} = \inf_{\|\vec{\alpha}\|\neq\|\mathbb{\Gamma}^*\vec{\alpha}\|} \frac{\|\mathbb{\Gamma}^*\vec{\alpha}\|^2 - \|\mathbb{\Gamma}\mathbb{\Gamma}^*\vec{\alpha}\|^2}{\|\vec{\alpha}\|^2 - \|\mathbb{\Gamma}\vec{\alpha}\|^2}, \tag{2.6}$$

якщо $\mathbb{\Gamma}\mathbb{\Gamma}^* \neq \mathbb{I}$, і $\inf\limits_{y\in B\setminus\{0\}} \frac{\|Py\|^2}{\|y\|^2} = 1 = \lambda_{\min}(\mathbb{I}) = \lambda_{\min}(\mathbb{\Gamma}\mathbb{\Gamma}^*)$ інакше.

Покажемо, що $\inf\limits_{\|\vec{\beta}\|\neq\|\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|} \frac{\|\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2-\|\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2}{\|\vec{\beta}\|^2-\|\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2} = \lambda_{\min}(\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma})$.

$\inf\limits_{\|\vec{\beta}\|\neq\|\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|} \frac{\|\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2-\|\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2}{\|\vec{\beta}\|^2-\|\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2} = \min\limits_{\|\vec{\beta}\|^2-\|\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2=1} (\|\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2 - \|\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2)$ — інфімум неперервної функції на компакті є досяжним. Позначимо $G(\vec{\beta}) \triangleq \|\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2 - \|\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2$ і запишемо необхідну умову умовного екстремуму $G(\vec{\beta})$ (при $\|\vec{\beta}\|^2 - \|\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2 = 1$):

$F(\vec{\beta}, \lambda) = \|\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2 - \|\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2 - \lambda(\|\vec{\beta}\|^2 - \|\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2 - 1)$ — функція Лагранжа,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \vec{\beta}} = \mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma}\vec{\beta} - (\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma})^2\vec{\beta} - \lambda\vec{\beta} + \lambda\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma}\vec{\beta} = \vec{0} \Leftrightarrow (\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma} - \lambda\,\mathbb{I})(\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma} - \mathbb{I})\vec{\beta} = \vec{0}, \tag{2.7}$$

при чому $(\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma} - \mathbb{I})\vec{\beta} \neq \vec{0}$, оскільки інакше $\|\vec{\beta}\|^2 - \|\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2 = 0 \neq 1$. Навпаки, враховуючи нерівність (2.3), $\|\vec{\beta}\|^2 - \|\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2 = \|\vec{\beta}\|^2 - (\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}, \vec{\beta}) \geqslant \geqslant \|\vec{\beta}\|^2 - \|\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\| \cdot \|\vec{\beta}\| > 0$ для будь-якого $\vec{\beta}$ такого, що $\|\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\| \neq \|\vec{\beta}\|$.

Покажемо, що нерівність $\|\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\| \neq \|\vec{\beta}\|$ виконується для всіх ненульових $\vec{\beta}$, окрім власних векторів $\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma}$, що відповідають власному числу

1. Для цього позначимо власні числа $\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma}$ як $\lambda_1, \dots \lambda_p$ (враховуючи кратність; нагадаємо, вони всі невід'ємні і не більші за 1), ортонормовану систему відповідних власних векторів – як $\{\vec{v}_1, \dots \vec{v}_p\}$. Тоді:

$$\|\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2 (\vec{v}_i, \vec{\beta})^2 \leqslant \sum_{i=1}^{p} (\vec{v}_i, \vec{\beta})^2 = \|\vec{\beta}\|^2,$$

при чому рівність можлива лише в тому випадку, коли кожному λ_i, що не дорівнює 1 (тобто, менше за 1), відповідає нульовий скалярний добуток $(\vec{v}_i, \vec{\beta}) = 0$, або, іншими словами, $\vec{\beta}$ є лінійною комбінацією тих власних векторів з системи $\{\vec{v}_1, \dots \vec{v}_p\}$, які відповідають власному числу 1, а отже і сам вектор $\vec{\beta}$ є власним вектором, що відповідає власному числу 1:

$$(\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma} - \mathbb{I})\vec{\beta} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \|\vec{\beta}\|^2 - \|\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\| \frac{\vec{\beta}}{\sqrt{\|\vec{\beta}\|^2 - \|\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2}} \right\|^2 - \left\| \mathbb{\Gamma} \frac{\vec{\beta}}{\sqrt{\|\vec{\beta}\|^2 - \|\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2}} \right\|^2 = 1. \qquad (2.8)$$

Тепер перетворимо (2.7) у наступний вигляд:

$$\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma}\vec{\beta} - (\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma})^2\vec{\beta} = \lambda(\vec{\beta} - \mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma}\vec{\beta})$$

і помножимо обидві сторони рівності скалярно на $\vec{\beta}$:

$$(\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}, \vec{\beta}) - ((\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma})^*(\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma})\vec{\beta}, \vec{\beta}) = \lambda((\vec{\beta}, \vec{\beta}) - (\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}, \vec{\beta})) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2 - \|\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2 = \lambda(\|\vec{\beta}\|^2 - \|\mathbb{\Gamma}\vec{\beta}\|^2) \Leftrightarrow G(\vec{\beta}) = \lambda.$$

Далі відмітимо, що за рахунок самоспряженості матриці $\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma} - \mathbb{I}$, виконується рівність $\mathrm{Ker}(\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma} - \mathbb{I}) \oplus \mathrm{Im}(\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma} - \mathbb{I}) = \mathbb{R}^p$. Більш того, $\mathbb{R}^p$ має ортонормований базис із власних векторів $\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma}$, тому, для будь-якого $\lambda \neq 1$, власного числа $\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma}$, власний вектор, що відповідає λ, лежить в $(\mathrm{Ker}(\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma} - \mathbb{I}))^\perp = \mathrm{Im}(\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma} - \mathbb{I})$. Як наслідок, існує таке $\vec{\beta}$, що $(\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma} - \mathbb{I})\vec{\beta}$ — власний вектор, що відповідає λ, тобто, $\frac{\partial F}{\partial \vec{\beta}} = \vec{0}$ (згідно (2.7)) і $(\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma} - \mathbb{I})\vec{\beta} \neq \vec{0}$. Значить, враховуючи (2.8), кожному такому λ

відповідає підозріла на умовний екстремум точка $\vec{\beta}_\lambda$, в якій $G(\vec{\beta}_\lambda) = \lambda$, і всі підозрілі на екстремум точки вичерпуються такими $\vec{\beta}_\lambda$, а отже $\min\limits_{\|\vec{\beta}\|^2 - \|\Gamma\vec{\beta}\|^2 = 1} G(\vec{\beta}) = \lambda_{\min}(\Gamma^*\Gamma)$, що і доводить

$$\inf_{\|\vec{\beta}\| \neq \|\Gamma\vec{\beta}\|} \frac{\|\Gamma\vec{\beta}\|^2 - \|\Gamma^*\Gamma\vec{\beta}\|^2}{\|\vec{\beta}\|^2 - \|\Gamma\vec{\beta}\|^2} = \lambda_{\min}(\Gamma^*\Gamma),$$

звідки, враховуючи рівність (2.4), і випливає бажана тотожність

$$\inf_{x \in A\setminus\{0\}} \frac{\|Qx\|^2}{\|x\|^2} = \lambda_{\min}(\Gamma^*\Gamma).$$

Аналогічно доводиться рівність $\inf\limits_{y \in B\setminus\{0\}} \frac{\|Py\|^2}{\|y\|^2} = \lambda_{\min}(\Gamma\Gamma^*)$. При $p = k$ виконується $\lambda_{\min}(\Gamma\Gamma^*) = \sigma^2_{\min}(\Gamma)$, інакше ж $\lambda_{\min}(\Gamma\Gamma^*) = 0$, оскільки в цьому випадку матриця $\Gamma\Gamma^*$ не є матрицею максимального рангу ($\mathrm{rang}(\Gamma\Gamma^*) = \mathrm{rang}(\Gamma) \leqslant p < k$, розмір матриці $\Gamma\Gamma^*$ — $k \times k$). В обох випадках виконується

$$\cos\measuredangle(A,B) = \max\left\{\inf_{y \in B\setminus\{0\}} \frac{\|Py\|}{\|y\|}; \inf_{x \in A\setminus\{0\}} \frac{\|Qx\|}{\|x\|}\right\} = \\ = \sigma_{\min}(\Gamma) = \sqrt{\lambda_{\min}(\Gamma^*\Gamma)}.$$

□

Зауваження 2.4. *З доведення леми 2.3 випливає, що для A, B — замкнених підпросторів однакової скінченної корозмірності — виконується*

$$\cos\measuredangle(A,B) = \inf_{y \in B\setminus\{0\}} \sup_{x \in A\setminus\{0\}} \cos\measuredangle(x,y) = \inf_{x \in A\setminus\{0\}} \sup_{y \in B\setminus\{0\}} \cos\measuredangle(x,y).$$

Зауваження 2.5. *З доведення леми 2.3 випливає, що для A, B — замкнених підпросторів різної скінченної корозмірності — виконується*

$$\min\left\{\inf_{y \in B\setminus\{0\}} \sup_{x \in A\setminus\{0\}} \cos\measuredangle(x,y); \inf_{x \in A\setminus\{0\}} \sup_{y \in B\setminus\{0\}} \cos\measuredangle(x,y)\right\} = 0,$$

а значить (див. зауваження 2.3),

$$\hat{d}(A,B) = \sqrt{2}.$$

Лема 2.4. *Нехай* $\{n_1, n_2, \dots n_k\}$ *і* $\{m_1, m_2, \dots m_k\}$ *— ортонормовані системи; для* $i = 1 \dots k$ $\tilde{n}_i$ *і* $\tilde{m}_i$ *— лінійні комбінації векторів* $\{n_1, n_2, \dots n_k\}$ *і* $\{m_1, m_2, \dots m_k\}$*, відповідно, при чому* $\|\tilde{n}_i\| = \|\tilde{m}_i\| = 1$*. Тоді*

$$\left|\det \begin{pmatrix} (n_1, m_1) & \dots & (n_1, m_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (n_k, m_1) & \dots & (n_k, m_k) \end{pmatrix}\right| \geqslant \left|\det \begin{pmatrix} (\tilde{n}_1, \tilde{m}_1) & \dots & (\tilde{n}_1, \tilde{m}_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\tilde{n}_k, \tilde{m}_1) & \dots & (\tilde{n}_k, \tilde{m}_k) \end{pmatrix}\right|.$$

Доведення. Оскільки $\tilde{n}_i$ і $\tilde{m}_i$ — лінійні комбінації систем векторів $\{n_1, n_2, \dots n_k\}$ і $\{m_1, m_2, \dots m_k\}$, відповідно, значить, $\tilde{n}_i = \sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_{ji} n_j$, $\tilde{m}_i = \sum\limits_{j=1}^{k} \beta_{ji} m_j$, або

$$\begin{pmatrix} \tilde{n}_1 \\ \vdots \\ \tilde{n}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \dots & \alpha_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_k \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \tilde{m}_1 \\ \vdots \\ \tilde{m}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{k1} & \dots & \beta_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_k \end{pmatrix}.$$

Введемо наступні позначення:

$$\mathbb{\Gamma} \triangleq \begin{pmatrix} (n_1, m_1) & \dots & (n_1, m_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (n_k, m_1) & \dots & (n_k, m_k) \end{pmatrix}; \quad \widetilde{\mathbb{\Gamma}} \triangleq \begin{pmatrix} (\tilde{n}_1, \tilde{m}_1) & \dots & (\tilde{n}_1, \tilde{m}_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\tilde{n}_k, \tilde{m}_1) & \dots & (\tilde{n}_k, \tilde{m}_k) \end{pmatrix};$$

$$\mathbb{A} \triangleq \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \dots & \alpha_{kk} \end{pmatrix}; \quad \mathbb{B} \triangleq \begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{k1} & \dots & \beta_{kk} \end{pmatrix}.$$

Тоді:

$$\widetilde{\mathbb{\Gamma}} = \begin{pmatrix} \tilde{n}_1 \\ \vdots \\ \tilde{n}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{m}_1 \dots \tilde{m}_k \end{pmatrix} = \mathbb{A} \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \dots m_k \end{pmatrix} \mathbb{B}^* = \mathbb{A}\mathbb{\Gamma}\mathbb{B}^*.$$

Рівності $\|\tilde n_i\| = \|\tilde m_i\| = 1$ для $i = 1\dots k$ означають, що $\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{k}\alpha_{ij}^2} = $
$= \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{k}\beta_{ij}^2} = 1$ для $i = 1\dots k$, тому, за теоремою Адамара про визначники,

$$|\det \mathbb{A}| \leqslant 1; \quad |\det \mathbb{B}| \leqslant 1,$$

а значить:

$$|\det \widetilde{\mathbb{\Gamma}}| = |\det(\mathbb{A}\mathbb{\Gamma}\mathbb{B}^*)| = |\det \mathbb{A}| \cdot |\det \mathbb{\Gamma}| \cdot |\det \mathbb{B}^*| \leqslant |\det \mathbb{\Gamma}|.$$

$\square$

Наслідок 2.1. *Нехай* $A = \{\tilde n_1, \tilde n_2, \dots \tilde n_k\}^\perp, B = \{\tilde m_1, \tilde m_2, \dots \tilde m_k\}^\perp$ *— підпростори однакової скінченної корозмірності* k *в* H*:* $\{\tilde n_1, \tilde n_2, \dots \tilde n_k\}$ *і* $\{\tilde m_1, \tilde m_2, \dots \tilde m_k\}$ *— лінійно незалежні системи. Тоді:*

$$\cos\measuredangle(A, B) \geqslant \frac{|\det \widetilde{\mathbb{\Gamma}}|}{\prod\limits_{i=1}^{k}\|\tilde n_i\| \prod\limits_{i=1}^{k}\|\tilde m_i\|}\left(\frac{k-1}{k^2}\right)^{\frac{k-1}{2}},$$

де 0^0 *(у випадку* $k = 1$*) вважаємо за* 1*, а також:*

$$\widetilde{\mathbb{\Gamma}} = \begin{pmatrix} (\tilde n_1, \tilde m_1) & \dots & (\tilde n_1, \tilde m_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\tilde n_k, \tilde m_1) & \dots & (\tilde n_k, \tilde m_k) \end{pmatrix}.$$

Доведення. Спочатку розглянемо випадок $k = 1$. Відповідно до леми 2.3, $\cos\measuredangle(A, B) = \frac{|(\tilde n_1, \tilde m_1)|}{\|\tilde n_1\|\cdot\|\tilde m_1\|} = \frac{|\det \widetilde{\mathbb{\Gamma}}|}{\|\tilde n_1\|\cdot\|\tilde m_1\|}$, що доводить правдивість наслідку.

Тепер нехай $k > 1$. Візьмемо $\{n_1, n_2, \dots n_k\}$ і $\{m_1, m_2, \dots m_k\}$ — ортонормовані базиси $A^\perp$ і $B^\perp$, відповідно. Позначимо

$$\mathbb{\Gamma} \triangleq \begin{pmatrix} (n_1, m_1) & \dots & (n_1, m_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (n_k, m_1) & \dots & (n_k, m_k) \end{pmatrix}.$$

Тоді, відповідно до леми 2.3,

$$\cos\measuredangle(A,B) = \sigma_{\min}(\mathbb{\Gamma}) = \sqrt{\lambda_{\min}(\Gamma^*\Gamma)}.$$

Відома наступна оцінка для найменшого власного числа самоспряженої невід'ємноозначеної матриці (див. [4, с. 223, нерівність (43)]):

$$\lambda_{\min}(\Gamma^*\Gamma) \geqslant \det(\Gamma^*\Gamma)\left(\frac{k-1}{\operatorname{Tr}(\Gamma^*\Gamma)}\right)^{k-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma_{\min}(\Gamma) \geqslant |\det\Gamma|\left(\frac{k-1}{\operatorname{Tr}(\Gamma^*\Gamma)}\right)^{\frac{k-1}{2}},$$

що, враховуючи лему 2.4, лінійність визначника, а також нерівність $\operatorname{Tr}(\Gamma^*\Gamma) \leqslant k^2$, дає нам:

$$\cos\measuredangle(A,B) \geqslant \frac{|\det\widetilde{\Gamma}|}{\prod\limits_{i=1}^{k}\|\tilde{n}_i\|\prod\limits_{i=1}^{k}\|\tilde{m}_i\|}\left(\frac{k-1}{k^2}\right)^{\frac{k-1}{2}}.$$

□

Наведемо кілька прикладів розрахунку косинуса кута між підпросторами. Проілюструємо в $\mathbb{R}^3$ співпадання наведеного і класичного косинуса кута між прямими/площинами.

Приклад 1. Кут між площинами в $\mathbb{R}^3$

Нехай $A = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}^{\perp}$, $B = \left\{\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right\}^{\perp}$. В цьому випадку

$$\Gamma = \left(\frac{1}{\sqrt{14}\sqrt{50}}(3+8+15)\right) = \left(\frac{13\sqrt{7}}{35}\right),$$

$$\cos\measuredangle(A,B) = \sigma_{\min}(\Gamma) = \frac{13\sqrt{7}}{35},$$

що співпадає з класичним стереометричним означенням кута між площинами як кута між їх нормалями.

Приклад 2. Кут між прямою та площиною в $\mathbb{R}^3$

Нехай $A = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}^{\perp}$, $B = \left\{\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\-5\end{pmatrix}\right\}^{\perp}$. В класичному стереометричному розумінні кута між прямою та площиною, кут між ними може бути знайдено через кут між прямою та нормаллю до площини:

$$\cos\measuredangle(A,B) = \sqrt{1-\cos^2\measuredangle(A^{\perp},B)},$$

де

$$A^{\perp} = л.о.\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\},$$

$$B = л.о.\left\{\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\4\\-5\end{pmatrix}\right\} = л.о.\left\{\begin{pmatrix}-40\\30\\0\end{pmatrix}\right\},$$

$$\cos\measuredangle(A^{\perp},B) = \frac{1}{\sqrt{14}}\frac{1}{50}\left|\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-40\\30\\0\end{pmatrix}\right)\right| = \frac{\sqrt{14}}{35},$$

тобто,

$$\cos\measuredangle(A,B) = \frac{\sqrt{35^2-14}}{35} = \frac{\sqrt{1211}}{35}.$$

Тепер за допомогою леми 2.3 знайдемо $\cos\measuredangle(A,B)$ відповідно до означення 2.3.

$$\Gamma = \begin{pmatrix}\frac{13\sqrt{7}}{35} & -\frac{2\sqrt{7}}{35}\end{pmatrix},$$

$$\cos\measuredangle(A,B) = \sigma_{\min}(\Gamma) = \sqrt{\lambda_{\min}(\Gamma\Gamma^*)} = \sqrt{\frac{169\cdot 7+4\cdot 7}{35^2}} = \frac{\sqrt{1211}}{35},$$

що співпадає з отриманим вище результатом за класичною схемою.

Приклад 3. Кут між прямими в $\mathbb{R}^3$

Нехай $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}^{\perp}, B = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}^{\perp}$. Косинус гострого кута в класичному сенсі:

$$A = \text{л.о.} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \text{л.о.} \left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$B = \text{л.о.} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \right\} = \text{л.о.} \left\{ \begin{pmatrix} -40 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\cos\measuredangle(A, B) = \frac{1}{\sqrt{42}} \frac{1}{50} \left| \left(\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -40 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right| = \frac{16\sqrt{42}}{105}.$$

Тепер за допомогою леми 2.3 знайдемо $\cos\measuredangle(A, B)$ відповідно до означення 2.3.

$$\mathbb{\Gamma} = \begin{pmatrix} \frac{13\sqrt{7}}{35} & -\frac{2\sqrt{7}}{35} \\ \frac{\sqrt{6}}{15} & \frac{2\sqrt{6}}{5} \end{pmatrix}, \mathbb{\Gamma}\mathbb{\Gamma}^* = \begin{pmatrix} \frac{1211}{1225} & \frac{\sqrt{42}}{525} \\ \frac{\sqrt{42}}{525} & \frac{74}{75} \end{pmatrix},$$

$$\det(\mathbb{\Gamma}\mathbb{\Gamma}^* - \lambda\,\mathbb{I}) = \left(\frac{1211}{1225} - \lambda\right)\left(\frac{74}{75} - \lambda\right) - \frac{42}{275625} =$$

$$= \lambda^2 - \left(\frac{1211}{1225} + \frac{74}{75}\right)\lambda + \left(\frac{1211}{1225} \cdot \frac{74}{75} - \frac{2}{13125}\right) =$$

$$= \lambda^2 - \frac{1211 \cdot 3 + 74 \cdot 49}{3675}\lambda + \frac{89614 - 14}{91875} =$$

$$= \lambda^2 - \frac{7259}{3675}\lambda + \frac{89600}{91875} = \lambda^2 - \frac{1037}{525}\lambda + \frac{512}{525} =$$

$$= \frac{525\lambda^2 - 1037\lambda + 512}{525} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_{\min}(\mathbb{\Gamma}\mathbb{\Gamma}^*) = \frac{1037 - \sqrt{1037^2 - 4 \cdot 525 \cdot 512}}{2 \cdot 525} = \frac{512}{525},$$

а отже

$$\cos\measuredangle(A,B)=\sqrt{\frac{512}{525}}=\frac{16\sqrt{2}}{5\sqrt{21}}=\frac{16\sqrt{42}}{105},$$

що співпадає з отриманим вище результатом за класичною схемою.

2.8 Гладка поверхня рівня в гільбертовому просторі як рівномірний рімановий многовид

Теорема 2.1. *Нехай H — гільбертовий простір. $\mathcal{M}=\{x\in H : F_1(x)=F_2(x)=\ldots=F_n(x)=0\}$ — гладка (F_i — гладкі функціонали, визначені на H) поверхня спільного рівня корозмірності n ($\{\mathbf{grad}\,F_1(p),\mathbf{grad}\,F_2(p),\ldots\mathbf{grad}\,F_n(p)\}$ — лінійно незалежна система в кожній точці $p\in\mathcal{M}$). Нехай також існують такі $\delta,\varepsilon>0$, що для будь-яких точок $p,q\in\mathcal{M}$ таких, що $\|p-q\|<\delta$, виконується:*

$$\frac{\begin{vmatrix}(\mathbf{grad}\,F_1(p),\mathbf{grad}\,F_1(q)) & \cdots & (\mathbf{grad}\,F_1(p),\mathbf{grad}\,F_n(q))\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ (\mathbf{grad}\,F_n(p),\mathbf{grad}\,F_1(q)) & \cdots & (\mathbf{grad}\,F_n(p),\mathbf{grad}\,F_n(q))\end{vmatrix}}{\prod\limits_{i=1}^{n}\|\,\mathbf{grad}\,F_i(p)\|\prod\limits_{i=1}^{n}\|\,\mathbf{grad}\,F_i(q)\|}\geqslant\varepsilon. \qquad (2.9)$$

Тоді $\mathcal{M}$ — рівномірнийріманів многовид.

Доведення. Для перевірки рівномірності в кожній точці наведемо карти, що мають існувати згідно означення 2.2 і покажемо, що для них виконуються відповідні умови:

$$U_p=\{q\in\mathcal{M} : \|p-q\|<\delta\};\quad \varphi_p(q)=\mathrm{pr}_{T_p\mathcal{M}}\,q,$$

де $T_p\mathcal{M}=\{\mathbf{grad}\,F_1(p),\ldots\mathbf{grad}\,F_n(p)\}^{\perp}\subset H$.

Умова 1) виконується очевидним чином. Умова 2) перетворюється в існування такого $\tilde{\varepsilon}>0$, що для всіх $p\in\mathcal{M}$, $q\in U_p,\xi\in T_q\mathcal{M}$:

$$\|\,\mathrm{pr}_{T_p\mathcal{M}}\,\xi\|\geqslant\tilde{\varepsilon}\|\xi\|.$$

Виходячи з означення кута між підпросторами та враховуючи зауваження 2.4, маємо:

$$\| \operatorname{pr}_{T_p\mathcal{M}} \xi\| = \sup_{x\in T_p\mathcal{M}\setminus\{0\}} \cos\measuredangle(\xi, x)\cdot\|\xi\| \geqslant \cos\measuredangle(T_q\mathcal{M}, T_p\mathcal{M})\cdot\|\xi\|,$$

але, за рахунок умови (2.9) і наслідку 2.1,

$$\cos\measuredangle(T_q\mathcal{M}, T_p\mathcal{M}) \geqslant \varepsilon\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{\frac{n-1}{2}},$$

де 0^0 (у випадку $n = 1$) вважається за 1.

$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}$ і буде шуканим $\tilde{\varepsilon}$. □

Наслідок 2.2. *Нехай H — гільбертовий простір. $\mathcal{M} = \{x \in H : F(x) = 0\}$ — поверхня рівня корозмірності 1. Нехай функція F — гладка класу C^2, а також існують такі $K, M > 0$, що для всіх $x \in \mathcal{M}, y \in o.o.(\mathcal{M})$ виконується:*

$$\|F'(x)\| \geqslant K, \|F''(y)\| \leqslant M.$$

Тоді $\mathcal{M}$ — рівномірний ріманів многовид.

Доведення. Доведемо, що існують такі $\delta, \varepsilon > 0$, що для всіх $p, q \in \mathcal{M}$ таких, що $\|p-q\| \leqslant \delta$, виконується (для зручності будемо ототожнювати градієнт і похідну скалярної функції)

$$\frac{(F'(p), F'(q))}{\|F'(p)\|\cdot\|F'(q)\|} \geqslant \varepsilon,$$

звідки, відповідно до теореми 2.1, випливає рівномірність многовиду $\mathcal{M}$.

Позначимо $p = x, q = x + h$. Оскільки, відповідно до умови наслідку, $\|F''(x + \lambda h)\| \leqslant M$ для будь-якого $\lambda \in [0, 1]$, то

$$\|F'(x) - F'(x + h)\| \leqslant M\|h\|,$$

або,

$$F'(x + h) = F'(x) + R(x, h),$$

де $\|R(x,h)\| \leqslant M\|h\|$.

Тоді

$$\frac{(F'(x), F'(x+h))}{\|F'(x)\| \cdot \|F'(x+h)\|} = \frac{(F'(x), F'(x)+R(x,h))}{\|F'(x)\| \cdot \|F'(x)+R(x,h)\|} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{(F'(x), F'(x)+R(x,h))}{\|F'(x)\|(\|F'(x)\|+\|R(x,h)\|)} \geqslant \frac{(F'(x), F'(x)+R(x,h))}{\|F'(x)\|(\|F'(x)\|+M\|h\|)},$$

а оскільки для всіх $x \in \mathcal{M}$

$$\|F'(x)\| \geqslant K \Rightarrow M\|h\| \leqslant \frac{M\|h\|}{K}\|F'(x)\|,$$

то

$$\frac{(F'(x), F'(x)+R(x,h))}{\|F'(x)\|(\|F'(x)\|+M\|h\|)} \geqslant \frac{K}{K+M\|h\|}\frac{(F'(x), F'(x)+R(x,h))}{\|F'(x)\|^2} =$$

$$= \frac{K}{K+M\|h\|}\left(1+\frac{(F'(x), R(x,h))}{\|F'(x)\|^2}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{K}{K+M\|h\|}\left(1-\frac{|(F'(x), R(x,h))|}{\|F'(x)\|^2}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{K}{K+M\|h\|}\left(1-\frac{\|R(x,h)\|}{\|F'(x)\|}\right) \geqslant \frac{K}{K+M\|h\|} \cdot \frac{K-M\|h\|}{K} =$$

$$= \frac{K-M\|h\|}{K+M\|h\|},$$

а значить, в якості шуканих δ і ε підійдуть

$$\delta \in \left(0, \frac{K}{M}\right),$$

$$\varepsilon = \frac{K-M\delta}{K+M\delta}.$$

□

Наслідок 2.3. *Нехай H — гільбертовий простір. $\mathcal{M} = \{x \in H : F_1(x) = F_2(x) = 0\}$ — поверхня рівня корозмірності* 2 *(**grad** $F_1(x)$, **grad** $F_2(x)$ — л.н.з). Нехай функції F_1, F_2 — гладкі класу C^2, а також існують такі $K, M > 0$ і $C \in [0,1)$, що для $i = 1,2$ і для всіх $x \in \mathcal{M}$, $y \in$ о.о.$(\mathcal{M})$ виконується:*

$$\|F_i'(x)\| \geqslant K, \|F_i''(y)\| \leqslant M,$$

$$|\cos\measuredangle(\mathbf{grad}\, F_1(x), \mathbf{grad}\, F_2(x))| = \frac{|(\mathbf{grad}\, F_1(x), \mathbf{grad}\, F_2(x))|}{\|\mathbf{grad}\, F_1(x)\| \cdot \|\mathbf{grad}\, F_2(x)\|} \leqslant C.$$

Тоді $\mathcal{M}$ — рівномірний ріманів многовид.

Доведення. Доведемо, що існують такі $\delta, \varepsilon > 0$, що для всіх $p, q \in \mathcal{M}$ таких, що $\|p - q\| \leqslant \delta$, виконується (для зручності будемо ототожнювати градієнт і похідну скалярної функції)

$$\frac{\begin{vmatrix} (F_1'(p), F_1'(q)) & (F_1'(p), F_2'(q)) \\ (F_2'(p), F_1'(q)) & (F_2'(p), F_2'(q)) \end{vmatrix}}{\|F_1'(p)\| \cdot \|F_2'(p)\| \cdot \|F_1'(q)\| \cdot \|F_2'(q)\|} \geqslant \varepsilon,$$

звідки, відповідно до теореми 2.1, випливає рівномірність многовиду $\mathcal{M}$.

Позначимо $p = x, q = x + h$. Оскільки, відповідно до умови наслідку, $\|F_i''(x + \lambda h)\| \leqslant M$ для будь-якого $\lambda \in [0,1]$, то для $i = 1,2$

$$\|F_i'(x) - F_i'(x + h)\| \leqslant M\|h\|,$$

або,

$$F_i'(x + h) = F_i'(x) + R_i(x,h), \tag{2.10}$$

де $\|R_i(x,h)\| \leqslant M\|h\|$.

Аналогічно до доведення наслідку 2.2, для $i = 1,2$

$$\|F_i'(q)\| = \|F_i'(x + h)\| \leqslant \frac{K + M\|h\|}{K}\|F_i'(x)\|,$$

а тому, враховуючи (2.10),

$$\frac{\begin{vmatrix} (F_1'(p), F_1'(q)) & (F_1'(p), F_2'(q)) \\ (F_2'(p), F_1'(q)) & (F_2'(p), F_2'(q)) \end{vmatrix}}{\|F_1'(p)\| \cdot \|F_2'(p)\| \cdot \|F_1'(q)\| \cdot \|F_2'(q)\|} =$$

$$= \frac{(F_1'(p), F_1'(q))(F_2'(p), F_2'(q)) - (F_1'(p), F_2'(q))(F_2'(p), F_1'(q))}{\|F_1'(p)\| \cdot \|F_2'(p)\| \cdot \|F_1'(q)\| \cdot \|F_2'(q)\|} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\left(\frac{K}{K+M\|h\|}\right)^2}{\|F_1'(x)\|^2 \cdot \|F_2'(x)\|^2}\Big((F_1'(x), F_1'(x+h))(F_2'(x), F_2'(x+h)) -$$

$$-(F_1'(x), F_2'(x+h))(F_2'(x), F_1'(x+h))\Big) = \left(\frac{K}{K+M\|h\|}\right)^2 \cdot$$

$$\cdot\left(\left(1 + \frac{(F_1'(x), R_1(x,h))}{\|F_1'(x)\|^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{(F_2'(x), R_2(x,h))}{\|F_2'(x)\|^2}\right) -\right.$$

$$-\left(\frac{(F_1'(x), F_2'(x))}{\|F_1'(x)\| \cdot \|F_2'(x)\|} + \frac{(F_1'(x), R_2(x,h))}{\|F_1'(x)\| \cdot \|F_2'(x)\|}\right)\cdot$$

$$\left.\cdot\left(\frac{(F_1'(x), F_2'(x))}{\|F_1'(x)\| \cdot \|F_2'(x)\|} + \frac{(F_2'(x), R_1(x,h))}{\|F_1'(x)\| \cdot \|F_2'(x)\|}\right)\right) \geqslant$$

$$\geqslant \left[\text{приймаючи } \|h\| \leqslant \frac{K}{M}\right] \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{K}{K+M\|h\|}\right)^2 \frac{(K - M\|h\|)^2 - (CK + M\|h\|)^2}{K^2} =$$

$$= \left(\frac{K}{K+M\|h\|}\right)^2 \frac{(1-C^2)K^2 - 2KM\|h\|(1+C)}{K^2} =$$

$$= (1+C)K\frac{(1-C)K - 2M\|h\|}{(K+M\|h\|)^2},$$

а значить, нас влаштовують наступні δ і ε

$$\delta \in \left(0, \frac{(1-C)K}{2M}\right),$$

$$\varepsilon = (1+C)K\frac{(1-C)K - 2M\delta}{(K+M\delta)^2}.$$

□

2.9 Гладка межа області в гільбертовому просторі як рівномірний рімановий многовид

Теорема 2.2. *Нехай H — гільбертовий простір. $D \subset H$ — область з гладкою межею, $\mathcal{M} \triangleq \partial D$, $\mathbf{n}$ — поле зовнішніх одиничних нормалей до $\mathcal{M}$. Нехай існують такі $\delta, \varepsilon > 0$, що для будь-яких точок $p, q \in \in \mathcal{M}$ таких, що $\|p - q\| < \delta$, виконується:*

$$(\mathbf{n}(p), \mathbf{n}(q)) \geqslant \varepsilon.$$

Тоді $\mathcal{M}$ — рівномірний ріманів многовид.

Доведення. Для перевірки рівномірності в кожній точці наведемо карти, що мають існувати згідно означення 2.2 і покажемо, що для них виконуються відповідні умови:

$$U_p = \{q \in \mathcal{M} : \|p - q\| < \delta\}; \quad \varphi_p(q) = \operatorname{pr}_{T_p\mathcal{M}} q,$$

де $T_p\mathcal{M} = \{\mathbf{n}(p)\}^{\perp} \subset H$.

Умова 1) виконується очевидним чином. Умова 2) перетворюється в існування такого $\tilde{\varepsilon} > 0$, що для всіх $p \in \mathcal{M}, q \in U_p, \xi \in T_q\mathcal{M}$:

$$\|\operatorname{pr}_{T_p\mathcal{M}} \xi\| \geqslant \tilde{\varepsilon}\|\xi\|.$$

Виходячи з означення кута між замкненими підпросторами та враховуючи зауваження 2.4, маємо:

$$\|\operatorname{pr}_{T_p\mathcal{M}} \xi\| = \sup_{x \in T_p\mathcal{M} \setminus \{0\}} \cos\measuredangle(\xi, x) \cdot \|\xi\| \geqslant \cos\measuredangle(T_q\mathcal{M}, T_p\mathcal{M}) \cdot \|\xi\|,$$

але, за рахунок леми 2.3 і умови теореми,

$$\cos\measuredangle(T_q\mathcal{M}, T_p\mathcal{M}) = |(\mathbf{n}(p), \mathbf{n}(q))| \geqslant \varepsilon.$$

$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$ і буде шуканим $\tilde{\varepsilon}$. □

2.10 Висновки до розділу 2

В цьому розділі розглянуто нескінченновимірніріманові многовиди. На зв'язному рімановому многовиді розглянуто конструкцію внутрішньої метрики — інфімуму довжин кусково гладких кривих, що поєднують відповідні точки. Внутрішня метрика може бути введеною до розгляду завдяки тому, що ріманів тензор породжує скалярний добуток, а отже і норму на дотичному просторі. Показано, що топологія зв'язного ріманового многовиду, породжена внутрішньою метрикою, не слабша за вихідну топологію.

Запропонована умова рівномірності атласу ріманового многовиду, виконання якої дозволяє довести метричну повноту многовиду за внутрішньою метрикою. Доведено, що при виконанні певних додаткових умов, які, зокрема, виконуються при умові рівномірності атласу, внутрішня метрика є узгодженою з вихідною топологією многовиду.

В якості нетривіальних прикладів показано, що при виконанні певних умов межа області та поверхня сумісного рівня в гільбертовому просторі є рімановими многовидами з рівномірними атласами. Для отримання рівномірності атласу наведених прикладів запропоновано та досліджено косинус кута між підпросторами в гільбертовому просторі. Доведено ряд результатів, що дозволяють оцінити косинус кута між підпросторами однакової скінченної корозмірності, і саме ця оцінка використовується при побудові прикладів.

РОЗДІЛ 3. ЛАПЛАСІАН ЗА МІРОЮ НА РІМАНОВОМУ МНОГОВИДІ І ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ

3.1 Простори функцій та векторних полів на рімановому многовиді

Позначимо через $C_b(\mathcal{M})$ простір всіх обмежених неперервних дійсних функцій на $\mathcal{M}$, через $C_{b;v}(\mathcal{M})$ простір всіх неперервних обмежених векторних полів на $\mathcal{M}$, через $C_b^1(\mathcal{M})$ (відповідно $C_{b;v}^1(\mathcal{M})$) простір всіх функцій $f \in C_b(\mathcal{M})$ (відповідно всіх векторних полів $\mathbf{X} \in C_{b;v}(\mathcal{M})$), диференційовних в кожній точці $x \in \mathcal{M}$ з неперервною і обмеженою на всьому $\mathcal{M}$ похідною $f'(\cdot)$ (відповідно $\mathbf{X}'(\cdot)$). Тут $f'(p) \in T_p^*\mathcal{M}$ визначено формулою $f'(p) : T_p\mathcal{M} \ni \mathbf{Y}_p \longmapsto \mathbf{Y}_p f \in \mathbb{R}$, $\mathbf{X}'(p)$ — лінійний оператор в $T_p\mathcal{M}$, визначений формулою $\mathbf{X}'(p) : \mathbf{Y}_p \longmapsto \nabla_{\mathbf{Y}_p}\mathbf{X}$, де ∇ — зв'язність Леві–Чивіти на $\mathcal{M}$ (нескінченновимірний варіант див., наприклад, в [19, с. 83]).

Нехай G — обмежена область в $\mathcal{M}$ з межею $S = \partial G$. Через $C^1(G)$ позначимо сукупність всіх функцій на $\overline{G} = G \cup S$, що допускають продовження на весь $\mathcal{M}$ до функцій класу $C_b^1(\mathcal{M})$; через $C_0^1(G)$ — сукупність функцій з $C^1(G)$, носії яких не перетинаються з деякою ε-межею S. Аналогічно визначаємо

$$C(G) = \left\{ f\big|_{\overline{G}} \,\middle|\, f \in C_b(\mathcal{M}) \right\} \text{ і } C_v^1(G) = \left\{ \mathbf{X}\big|_{\overline{G}} \,\middle|\, \mathbf{X} \in C_{b;v}^1(\mathcal{M}) \right\}.$$

Нехай σ — скінченна невід'ємна борелівська міра на $\mathcal{M}$. Через $L^p(G) = L^p(G, \sigma)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ позначимо простір вимірних функцій на G, які при піднесенні до степеня p є інтегровними по відношенню до міри $\sigma\big|_G$.

3.1.1 Простори інтегровних та інтегровних з квадратом векторних полів

Векторне поле $\mathbf{X}$ на $\mathcal{M}$ назвемо *вимірним*, якщо існує така послідовність векторних полів $\mathbf{X}_m \in C_{b;v}(\mathcal{M})$, що збігається до $\mathbf{X}$ майже всюди ($\|\mathbf{X}_m(\cdot) - \mathbf{X}(\cdot)\| \longrightarrow 0 \pmod{\sigma}$).

Означення 3.1. Вимірне векторне поле $\mathbf{X}$ на $\mathcal{M}$ назвемо *інтегровним*, якщо існує така послідовність векторних полів $\mathbf{X}_m \in C_{b;v}(\mathcal{M})$, що збігається до $\mathbf{X}$ майже всюди, функція $\|\mathbf{X}_m(\cdot) - \mathbf{X}(\cdot)\|$ інтегровна для достатньо великих m і виконується

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{\mathcal{M}} \|\mathbf{X}_m(\cdot) - \mathbf{X}(\cdot)\| \, d\sigma = 0.$$

Означення 3.2. Вимірне векторне поле $\mathbf{X}$ на $\mathcal{M}$ назвемо *інтегровним з квадратом*, якщо існує така послідовність векторних полів $\mathbf{X}_m \in$ $\in C_{b;v}(\mathcal{M})$, що збігається до $\mathbf{X}$ майже всюди, функція $\|\mathbf{X}_m(\cdot) - \mathbf{X}(\cdot)\|^2$ інтегровна для достатньо великих m і виконується

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{\mathcal{M}} \|\mathbf{X}_m(\cdot) - \mathbf{X}(\cdot)\|^2 \, d\sigma = 0.$$

Простір інтегровних і інтегровних з квадратом векторних полів позначимо, відповідно, $L^1_v(\mathcal{M}) = L^1_v(\mathcal{M}, \sigma)$ і $L^2_v(\mathcal{M}) = L^2_v(\mathcal{M}, \sigma)$.

Означення 3.3. Більш загально, для будь-якого $p : 1 \leqslant p < \infty$ будемо казати, що вимірне векторне поле $\mathbf{X}$ на $\mathcal{M}$ *інтегровне зі степенем* p, тобто належить простору $L^p_v(\mathcal{M}) = L^p_v(\mathcal{M}, \sigma)$, якщо існує така послідовність векторних полів $\mathbf{X}_m \in C_{b;v}(\mathcal{M})$, що збігається до $\mathbf{X}$ майже всюди, функція $\|\mathbf{X}_m(\cdot) - \mathbf{X}(\cdot)\|^p$ інтегровна для достатньо великих m і виконується

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{\mathcal{M}} \|\mathbf{X}_m(\cdot) - \mathbf{X}(\cdot)\|^p \, d\sigma = 0.$$

Зауваження 3.1. *Говорити про значення інтеграла інтегровного векторного поля в тому випадку, коли $\mathcal{M}$ не є вкладеним у лінійний простір, не видається можливим.*

Теорема 3.1. *Нехай $1 \leqslant p < \infty$. Для того, щоб вимірне векторне поле $\mathbf{X}$ на $\mathcal{M}$ належало $L^p_v(\mathcal{M}, \sigma)$, необхідно і достатньо, щоб функція $\|\mathbf{X}(\cdot)\|$ належала простору $L^p(\mathcal{M}, \sigma)$.*

Доведення. Спочатку доведемо необхідність. Нехай $\mathbf{X}_m \in C_{b;v}(\mathcal{M})$ — послідовність векторних полів, що існує згідно до означення векторного поля з $L^p_v(\mathcal{M}, \sigma)$. Вимірність функції $\|\mathbf{X}\|^p$ випливає з вимірності $\|\mathbf{X}_m\|^p$ і збіжності майже всюди $\mathbf{X}_m$ до $\mathbf{X}$. Відповідно до нерівності трикутника маємо

$$\|\mathbf{X}(\cdot)\|^p \leqslant (\|\mathbf{X}_m(\cdot)\| + \|\mathbf{X}(\cdot) - \mathbf{X}_m(\cdot)\|)^p,$$

а враховуючи нерівність про середні,

$$\frac{\|\mathbf{X}_m(\cdot)\| + \|\mathbf{X}(\cdot) - \mathbf{X}_m(\cdot)\|}{2} \leqslant \sqrt[p]{\frac{\|\mathbf{X}_m(\cdot)\|^p + \|\mathbf{X}(\cdot) - \mathbf{X}_m(\cdot)\|^p}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\|\mathbf{X}_m(\cdot)\| + \|\mathbf{X}(\cdot) - \mathbf{X}_m(\cdot)\|)^p \leqslant 2^{p-1}(\|\mathbf{X}_m(\cdot)\|^p + \|\mathbf{X}(\cdot) - \mathbf{X}_m(\cdot)\|^p),$$

тому

$$\|\mathbf{X}(\cdot)\|^p \leqslant 2^{p-1}(\|\mathbf{X}_m(\cdot)\|^p + \|\mathbf{X}(\cdot) - \mathbf{X}_m(\cdot)\|^p),$$

при чому $\|\mathbf{X}_m(\cdot)\|^p$ і $\|\mathbf{X}(\cdot) - \mathbf{X}_m(\cdot)\|^p$ (для достатньо великих m) — інтегровні функції на $\mathcal{M}$, а тому і $\|\mathbf{X}(\cdot)\|^p$ інтегровна і, враховуючи

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{\mathcal{M}} \|\mathbf{X}_m(\cdot) - \mathbf{X}(\cdot)\|^p \, d\sigma = 0,$$

виконується

$$\int\limits_{\mathcal{M}} \|\mathbf{X}(\cdot)\|^p \, d\sigma \leqslant 2^{p-1} \varliminf_{m\to\infty} \int\limits_{\mathcal{M}} \|\mathbf{X}_m(\cdot)\|^p \, d\sigma.$$

Тепер доведемо достатність. Оскільки $\mathbf{X}$ — вимірне векторне поле, то існує така послідовність векторних полів $\mathbf{X}_m \in C_{b;v}(\mathcal{M})$, що

$$\|\mathbf{X}_m(\cdot) - \mathbf{X}(\cdot)\| \longrightarrow 0 \ (\operatorname{mod} \sigma) \Rightarrow \|\mathbf{X}_m(\cdot) - \mathbf{X}(\cdot)\|^p \longrightarrow 0 \ (\operatorname{mod} \sigma).$$

Вимірність функції $\|\mathbf{X}_m - \mathbf{X}\|^p$ випливає із вимірності функції $\|\mathbf{X}_m - \mathbf{X}_n\|^p$ і збіжності $\|\mathbf{X}_m - \mathbf{X}_n\|^p$ до $\|\mathbf{X}_m - \mathbf{X}\|^p$ майже всюди при $n \to \infty$. Фіксуємо $\varepsilon > 0$. Оскільки $\|\mathbf{X}_m(\cdot)\|^p \leqslant 2^{p-1}\|\mathbf{X}(\cdot)\|^p + 2^{p-1}\|\mathbf{X}_m(\cdot) - \mathbf{X}(\cdot)\|^p$, то для достатньо великих m виконується

$$\|\mathbf{X}_m(\cdot)\|^p \leqslant 2^{p-1}\|\mathbf{X}(\cdot)\|^p + 2^{p-1}\varepsilon \pmod{\sigma},$$

а отже

$$\|\mathbf{X}_m(\cdot) - \mathbf{X}(\cdot)\|^p \leqslant 2^{p-1}\|\mathbf{X}_m(\cdot)\|^p + 2^{p-1}\|\mathbf{X}(\cdot)\|^p \leqslant$$
$$\leqslant 2^{p-1}(2^{p-1}\|\mathbf{X}(\cdot)\|^p + 2^{p-1}\varepsilon) + 2^{p-1}\|\mathbf{X}(\cdot)\|^p =$$
$$= (2^{2p-2} + 2^{p-1})\|\mathbf{X}(\cdot)\|^p + 2^{2p-2}\varepsilon,$$

тому, завдяки інтегровності $\|\mathbf{X}(\cdot)\|^p$, функція $\|\mathbf{X}_m(\cdot) - \mathbf{X}(\cdot)\|^p$ також інтегровна і ми можемо використати теорему Лебега про мажоровану збіжність, відповідно до якої

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{\mathcal{M}} \|\mathbf{X}_m(\cdot) - \mathbf{X}(\cdot)\|^p \, d\sigma = 0,$$

що і доводить, що $\mathbf{X} \in L_v^p(\mathcal{M}, \sigma)$. □

Скалярний добуток в $L_v^2(\mathcal{M})$ задаємо формулою:

$$(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \int\limits_{\mathcal{M}} (\mathbf{X}(\cdot), \mathbf{Y}(\cdot))_{(\cdot)} \, d\sigma = \int\limits_{\mathcal{M}} g_{(\cdot)}(\mathbf{X}(\cdot), \mathbf{Y}(\cdot)) \, d\sigma,$$

а відповідну норму $\mathbf{X}$ позначимо символом $|||\mathbf{X}|||$.

Аналогічно визначаються простори $L_v^p(G) = L_v^p(G, \sigma)$.

Зауваження 3.2. *Перевіримо коректність заданого на $L_v^2(\mathcal{M})$ скалярного добутку. Для інтегровних з квадратом векторних полів $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ відповідно до означення існують послідовності векторних полів $\mathbf{X}_m, \mathbf{Y}_m$ з $C_{b;v}(\mathcal{M})$ таких, що $\mathbf{X}_m$ і $\mathbf{Y}_m$ збігаються майже всюди при $m \to \infty$ до $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$, відповідно. Оскільки функції $(\mathbf{X}_m(\cdot), \mathbf{Y}_m(\cdot))$ лежать в $C_b(\mathcal{M})$ для кожного m, а при $m \to \infty$ послідовність функцій $(\mathbf{X}_m(\cdot), \mathbf{Y}_m(\cdot))$*

збігається до $(\mathbf{X}(\cdot), \mathbf{Y}(\cdot))$ *майже всюди, то функція* $(\mathbf{X}(\cdot), \mathbf{Y}(\cdot))$ *є вимірною. Оскільки ж виконується нерівність*

$$|(\mathbf{X}(\cdot), \mathbf{Y}(\cdot))| \leqslant \frac{\|\mathbf{X}(\cdot)\|^2 + \|\mathbf{Y}(\cdot)\|^2}{2},$$

то з інтегровності $\|\mathbf{X}(\cdot)\|^2$ *і* $\|\mathbf{Y}(\cdot)\|^2$ *випливає інтегровність функції* $(\mathbf{X}(\cdot), \mathbf{Y}(\cdot))$*, а отже і коректність скалярного добутку на* $L_v^2(\mathcal{M})$.

3.1.2 Повнота векторного простору L_v^p

Тут і далі будемо вважати, що атлас $\mathcal{M}$ є рівномірним.

Введемо наступне позначення для $\mathbf{X} \in L_v^p(\mathcal{M})$:

$$|||\mathbf{X}|||_p \triangleq \left(\int\limits_{\mathcal{M}} \|\mathbf{X}(\cdot)\|^p \, d\sigma \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Твердження 3.1. *Нехай* $1 \leqslant p_1 < p_2 < \infty$*. Тоді* $L_v^{p_2}(\mathcal{M}) \subset L_v^{p_1}(\mathcal{M})$ *і для будь-якого векторного поля* $\mathbf{X} \in L_v^{p_2}(\mathcal{M})$ *справедлива нерівність*

$$|||\mathbf{X}|||_{p_1} \leqslant C |||\mathbf{X}|||_{p_2},$$

де C *не залежить від векторного поля* $\mathbf{X}$.

Доведення. Використаємо нерівність Гельдера:

$$|||\mathbf{X}|||_{p_1}^{p_1} = \int\limits_{\mathcal{M}} \|\mathbf{X}(\cdot)\|^{p_1} \, d\sigma \leqslant \left(\int\limits_{\mathcal{M}} \|\mathbf{X}(\cdot)\|^{p_2} \, d\sigma \right)^{\frac{p_1}{p_2}} (\sigma(\mathcal{M}))^{\frac{p_2 - p_1}{p_2}},$$

що і доводить твердження. □

Лема 3.1. *Нехай* $1 \leqslant p < \infty$ *і* $\{\mathbf{X}_m\}_{m=1}^{\infty}$ *— фундаментальна послідовність векторних полів простору* $L_v^p(\mathcal{M})$*. Тоді існує підпослідовність* $\{\mathbf{X}_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$*, збіжна майже всюди до деякого вимірного векторного поля* $\mathbf{X}$.

Доведення. Виберемо послідовність $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ таким чином, щоб

$$|||\mathbf{X}_m - \mathbf{X}_{m_k}|||_p \leqslant \frac{1}{2^k}$$

при $m \geqslant m_k$. Відповідно до твердження 3.1,

$$|||\mathbf{X}_{m_{k+1}} - \mathbf{X}_{m_k}|||_1 \leqslant C\frac{1}{2^k}.$$

Для $x \in \mathcal{M}$ розглянемо ряд

$$F(x) \triangleq \|\mathbf{X}_{m_1}(x)\| + \sum_{k=1}^{\infty} \|\mathbf{X}_{m_{k+1}}(x) - \mathbf{X}_{m_k}(x)\|,$$

тоді

$$\int\limits_{\mathcal{M}} F(x)\, d\sigma \leqslant |||\mathbf{X}_{m_1}|||_1 + C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} < \infty,$$

а тому $F(x)$ скінченна майже всюди функція, а ряд

$$\mathbf{X}_{m_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty}(\mathbf{X}_{m_{k+1}}(x) - \mathbf{X}_{m_k}(x))$$

абсолютно збіжний майже всюди. Оскільки, відповідно до твердження 2.4, в кожній точці $x \in \mathcal{M}$ простір $T_x\mathcal{M}$ є повним, то з абсолютної збіжності випливає збіжність. Тоді векторне поле

$$\mathbf{X}(x) = \begin{cases} \mathbf{X}_{m_1}(x) + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(\mathbf{X}_{m_{k+1}}(x) - \mathbf{X}_{m_k}(x)), & x \in \mathcal{M} : \text{ ряд збіжний} \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}$$

буде вимірним векторним полем, для якого виконується

$$\|\mathbf{X}_{m_k}(\cdot) - \mathbf{X}(\cdot)\| \longrightarrow 0 \,(\mathrm{mod}\, \sigma),$$

а $\{\mathbf{X}_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ — шукана підпослідовність. □

Теорема 3.2. *Для будь-якого $p : 1 \leqslant p < \infty$ векторний простір $L_v^p(\mathcal{M})$ є повним.*

Доведення. Нехай $\{\mathbf{X}_m\}_{m=1}^{\infty}$ — фундаментальна послідовність векторних полів простору $L^p_v(\mathcal{M})$. Тоді, застосовуючи лему 3.1, виділемо з неї підпослідовність $\mathbf{X}_{m_k}$, яка збіжна майже всюди до вимірного векторного поля $\mathbf{X}$. Оскільки

$$\|\mathbf{X}_{m_k}(\cdot)\|^p \longrightarrow \|\mathbf{X}(\cdot)\|^p \,(\mathrm{mod}\,\sigma) \text{ при } k \to \infty,$$

то з леми Фату випливає, що $\|\mathbf{X}(\cdot)\| \in L^p(\mathcal{M})$, а значить $\mathbf{X} \in L^p_v(\mathcal{M})$ відповідно до теореми 3.1. Далі, якщо задано $\varepsilon > 0$, то можна вибрати $K_0 > 0$ так, що при $q, r > K_0$ буде мати місце нерівність

$$|\!|\!|\mathbf{X}_q - \mathbf{X}_r|\!|\!|_p < \varepsilon.$$

Враховуючи, що

$$\|\mathbf{X}_{m_k}(\cdot) - \mathbf{X}_{m_l}(\cdot)\|^p \longrightarrow \|\mathbf{X}_{m_k}(\cdot) - \mathbf{X}(\cdot)\|^p \text{ при } l \to \infty,$$

і знову застосовуючи лему Фату, отримаємо

$$|\!|\!|\mathbf{X}_{m_k} - \mathbf{X}|\!|\!|_p \leqslant \varepsilon \text{ при } m_k > K_0,$$

а значить, при $r > K_0$ виконується

$$|\!|\!|\mathbf{X}_r - \mathbf{X}|\!|\!|_p < 2\varepsilon,$$

тобто,

$$|\!|\!|\mathbf{X}_m - \mathbf{X}|\!|\!|_p \longrightarrow 0 \text{ при } m \to \infty.$$

$\square$

3.2 Лапласіан за мірою в L^2-версії на рімановому многовиді

Нехай $\mathcal{M}$ — гладкий сепарабельний дійсний гільбертів многовид класу C^2 з модельним простором H ($\dim H \leqslant \infty$) і основним тензором g. σ — скінченна невід'ємна борелівська міра на $\mathcal{M}$. Також вважаємо, що атлас многовиду $\mathcal{M}$ є рівномірним, що гарантує його метричну повноту, а також повноту просторів $L^p_v(\mathcal{M}, \sigma)$.

Для функцій $u \in C^1_b(\mathcal{M})$ на рімановому многовиді визначено векторне поле $\mathbf{grad}\, u \in C_{b;v}(\mathcal{M})$, яке визначається співвідношенням $g(\mathbf{grad}\, u, \mathbf{Y}) = \mathbf{Y}u$, яке виконується для будь-якого $\mathbf{Y} \in C^1_{b;v}(\mathcal{M})$. У випадку повноти носія міри σ (коли для кожної непустої відкритої множини $U \subset \mathcal{M}$ виконана нерівність $\sigma(U) > 0$), із рівності $u = v \pmod{\sigma}$ (тут $u, v \in C^1_b(\mathcal{M})$) випливає рівність $\mathbf{grad}\, u = \mathbf{grad}\, v \pmod{\sigma}$. Тим самим коректно визначено оператор

$$\mathbf{grad} = \mathbf{grad}_{\mathcal{M}} : L^2(\mathcal{M}) \supset C^1_b(\mathcal{M}) \ni u \longmapsto \mathbf{grad}\, u \in L^2_v(\mathcal{M}).$$

Оскільки $C^1_b(\mathcal{M})$ щільно в $L^2(\mathcal{M})$, коректно визначено оператор

$$\operatorname{div} = -(\mathbf{grad})^* : L^2_v(\mathcal{M}) \longrightarrow L^2(\mathcal{M}).$$

У випадку, коли $\mathbf{grad}$ допускає замикання, лапласіан (за мірою σ) на $\mathcal{M}$ визначено формулою

$$\Delta = \operatorname{div} \circ \overline{\mathbf{grad}},$$

де Δ — самоспряжений оператор в $L^2(\mathcal{M})$ (див., наприклад, [5, с. 106]).

Оскільки $\mathcal{M}$ вважається повним простором відносно внутрішньої метрики, поле $\mathbf{X} \in C^1_b(\mathcal{M})$ є повним. Нехай $\Phi_t = \Phi^{\mathbf{X}}_t$ — потік поля $\mathbf{X}$. Диференційовність міри σ вздовж поля $\mathbf{X}$ розуміємо всюди в подальшому в сильному сенсі: для кожної борелівської множини $A \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$ існує межа $\nu(A) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t}(\sigma(\Phi_t A) - \sigma(A))$. Звідси випливає, що $\nu = d_{\mathbf{X}}\sigma$ є борелівською мірою (знакозмінною), абсолютно неперервною відносно σ. Логарифмічну похідну міри σ вздовж поля $\mathbf{X}$ (тобто дивергенцію поля $\mathbf{X}$ відносно міри σ) позначимо символом $\rho_\sigma = \rho^{\mathbf{X}}_\sigma = \frac{d\nu}{d\sigma} = \operatorname{div}_\sigma \mathbf{X}$.

Нехай межа S обмеженої області $G \subset \mathcal{M}$ є гладким вкладеним в $\mathcal{M}$ підмноговидом корозмірності 1, а поле зовнішньої нормалі межі S може бути продовжено до векторного поля $\mathbf{n} \in C^1_{b;v}(\mathcal{M})$.

У тому випадку, коли міра σ диференційовна вздовж поля $\mathbf{n}$, говоримо про “узгодженість S з мірою σ”. При узгодженості міри σ з поверхністю $S = \partial G$ на S індукується поверхнева міра τ [8–10]. Міра τ на S коректно визначено формулою

$$\int\limits_S f\, d\tau = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{n}} G} f\, d\sigma,$$

що виконується для кожної функції $f \in C_b(\mathcal{M})$. Інший підхід до (еквівалентного) визначення міри τ полягає в наступному: для множин $A \subset \mathcal{M}$, $B \subset \mathbb{R}$ вводимо позначення

$$\Phi_B^{\mathbf{n}} A \triangleq \{\Phi_t^{\mathbf{n}} x \mid x \in A; t \in B\}.$$

Тоді для $A \in \mathcal{B}(S)$ міра τ визначена рівністю

$$\tau(A) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \sigma\left(\Phi^{\mathbf{n}}_{(-\infty,t)} A\right) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \sigma\left(\Phi^{\mathbf{n}}_{(-\infty,t]} A\right) \tag{3.1}$$

(тут використано той факт, що $\sigma(\Phi_t^{\mathbf{n}} S) = 0$ для $t \in \mathbb{R}$) (див. [8]).

Для функцій $u \in C_b^1(G)$ має місце рівність

$$\int\limits_S u\, d\tau = \int\limits_G (\mathbf{grad}\, u, \mathbf{n})\, d\sigma + \int\limits_G u \cdot \operatorname{div}_\sigma \mathbf{n}\, d\sigma \tag{3.2}$$

(див. [8; 10]).

У випадку, коли $\operatorname{div}_\sigma \mathbf{n} \in L^\infty(\mathcal{M})$ (або, хоча б $\operatorname{div}_\sigma \mathbf{n}\big|_G \in L^\infty(G)$), з (3.2) випливає існування константи C, для якої при всіх $u \in C^1(G)$ виконується нерівність

$$\left\| u\big|_S \right\|_{L^2(S,\tau)} \leqslant C \left(\|u\|_{L^2(G)} + \| \mathbf{grad}\, u \|_{L^2_v(G)} \right) \tag{3.3}$$

(доведення формули дивитися далі твердження 3.2 в підрозділі 3.5).

В роботі [10] встановлено щільність множини $C_0^1(G)$ в просторі $L^2(G)$ у випадку, коли $\mathcal{M} = H$ — сепарабельний гільбертів простір. Випадок сепарабельного ріманового многовиду дивитися далі твердження 3.3 в підрозділі 3.5. Тому оператор

$$\mathbf{grad}_G : L^2(G) \supset C^1(G) \ni u \longmapsto \mathbf{grad}\, u \in L^2_v(G)$$

є щільно визначеним. У випадку, якщо оператор $\mathbf{grad}_G$ допускає замикання, а $\operatorname{div}_\sigma \mathbf{n} \in L^\infty(\mathcal{M})$, із нерівності (3.3) випливає коректність побудови оператора сліду

$$\gamma : L^2(G) \longrightarrow L^2(S) = L^2(S, \tau)$$

з областю визначення $\mathcal{D}(\overline{\mathbf{grad}_G})$, який для функцій $u \in C^1(G)$ співпадає з оператором обмеження: $u \mapsto u\big|_S$. Оператор γ є обмеженим оператором із банахова в нормі графіка простору $\mathcal{D}(\overline{\mathbf{grad}_G})$ в $L^2(S)$ (в роботі [10] побудова оператора обґрунтована для випадку гільбертового простору; випадок ріманового многовиду розглядається повністю аналогічно).

Оператор $\operatorname{div}_G : L^2_v(G) \longrightarrow L^2(G)$ введемо формулою

$$\operatorname{div}_G \triangleq -\left(\overline{\mathbf{grad}_G}\Big|_{\operatorname{Ker}\gamma}\right)^*. \tag{3.4}$$

Доцільність цього означення випливає з формули (4) роботи [9]:

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{n}} G} u\, d\sigma = \int\limits_S (\mathbf{Z}, \mathbf{n}) u\, d\tau = \int\limits_G (\mathbf{grad}\, u, \mathbf{Z})\, d\sigma + \int\limits_G u \cdot \operatorname{div}_\sigma \mathbf{Z}\, d\sigma, \tag{3.5}$$

в якій $\mathbf{Z} \in C^1_{b;v}(\mathcal{M}), u \in C^1_b(\mathcal{M})$ і σ диференційовна вздовж поля $\mathbf{Z}$.

У випадку $u\big|_S = 0$ формула (3.5) перетворюється в рівність

$$\int\limits_G (\mathbf{grad}\, u, \mathbf{Z})\, d\sigma + \int\limits_G u \cdot \operatorname{div}_\sigma \mathbf{Z}\, d\sigma = 0,$$

яка і є аргументом для введення оператора div_G формулою (3.4).

Лапласіан — оператор $\Delta_G : L^2(G) \longrightarrow L^2(G)$ — визначимо формулою: $\Delta_G \triangleq \operatorname{div}_G \circ \overline{\mathbf{grad}_G}$; Δ_G є щільно визначеним, оскільки він є розширенням самоспряженого оператора $-\left(\overline{\mathbf{grad}_G}\right)^* \overline{\mathbf{grad}_G}$.

3.3 Модельний приклад

Нехай H — сепарабельний гільбертів простір, D — обмежена область в H, $\mathcal{M} = \partial D$ — межа області D — є гладкий класу C^2 вкладений в H підмноговид корозмірності 1. Вкладення $\mathcal{M}$ в H індукує на $\mathcal{M}$ структуру ріманового многовиду. Поле зовнішньої нормалі до $\mathcal{M}$ вважається таким, що може бути продовженим до векторного поля $\mathbf{N} \in C^1_{b;v}(H)$. Хай також виконується умова теореми 2.2, яка гарантує рівномірність $\mathcal{M}$, а значить, і повноту відносно внутрішньої метрики. Нехай μ — скінченна борелівська (невід'ємна) міра в H, для якої існує в H повна система векторів h, вздовж яких міра μ L^2-диференційовна (тобто μ диференційовна вздовж h і $\rho^h_\mu = \frac{d(d_h\mu)}{d\mu} \in L^2(H)$).

Додатково будемо вважати, що для міри μ виконується наступна умова: множина квазіінваріантних зсувів h ($\mu_h(A) \triangleq \mu(A+h); \mu_h \sim \mu$) містить щільний в H лінійний підмноговид. Для такої міри виконана умова: $\mu(U) > 0$ для будь-якої відкритої множини в H (повнота носія міри).

Якщо міра μ задовольняє наведені вище умови, то відповідний оператор $\mathbf{grad} : L^2(H) \supset C^1_b(H) \longrightarrow L^2_v(H)$ коректно визначено (див. [10, пропозиція 4]). Прикладом міри μ, що задовольняє обидві наведені умови, є гаусова міра, кореляційний оператор якої має щільний образ в H.

До міри μ застосуємо процедуру згладжування вздовж поля $\mathbf{N}$ (див. [15]). При цьому міра μ_φ будується за правилом

$$\mu_\varphi(A) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t)\mu(\Phi^{\mathbf{N}}_t A)dt.$$

Тут A — довільна борелівська множина в H, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}), \varphi \geqslant 0$, $\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t)dt < \infty$.

Отримана μ_φ диференційовна вздовж поля $\mathbf{N}$.

Якщо існує константа $C > 0$, для якої при всіх $s \in \mathbb{R}$ виконується нерівність $|\varphi'(s)| \leqslant C\varphi(s)$ (наприклад, $\varphi(s) = \frac{1}{1+s^2}$), то $\rho^{\mathbf{N}}_{\mu_\varphi} \in L^\infty(H; \mu_\varphi)$.

В роботі [15] доведено, що при переході від міри μ до міри μ_φ зберігається умова повноти носія міри, а також умова існування замикання оператора $\mathbf{grad}$ (але вже $\mathbf{grad} : L^2(H; \mu_\varphi) \longrightarrow L^2_v(H; \mu_\varphi)$).

Міра μ_φ узгоджена з $\mathcal{M} = \partial D$, що дозволяє індукувати на $\mathcal{M}$ поверхневу міру σ.

Зауваження 3.3. *Узгодження міри μ з поверхнею $\mathcal{M}$ означає існування хоча б одного векторного поля $\mathbf{N} \in C^1_{b;v}(H)$, обмеження якого на $\mathcal{M}$ збігається з полем одиничної нормалі до $\mathcal{M}$ і вздовж якого міра μ диференційовна. У зв'язку з цим виникає проблема опису класу поверхонь в H, узгоджених з заданою мірою μ. Це питання бачиться доволі складним і не було дослідженим. Процедура згладжування міри вздовж векторного поля дозволяє розв'язати двоїсту задачу: побудова класу мір, що є узгоджені з фіксованою поверхнею.*

Далі буде доведено, що в випадку, коли $\rho^{\mathbf{N}}_{\mu_\varphi}$ лежить в $L^\infty(H; \mu_\varphi)$ (а ця умова може бути виконаною), індукована на $\mathcal{M}$ міра σ успадковує дві властивості міри μ_φ: повноту носія міри і існування замикання (індукованого) оператора

$$\mathbf{grad}_{\mathcal{M}} : L^2(\mathcal{M}, \sigma) \supset C^1_b(\mathcal{M}) \ni u \longmapsto \mathbf{grad}_{\mathcal{M}}\, u \in L^2_v(\mathcal{M}; \sigma)$$

(нагадаємо, що індукований на поверхню $\mathcal{M}$ оператор $\mathbf{grad}_{\mathcal{M}}$ будується так: $(\mathbf{grad}_{\mathcal{M}}\, u)(x) = P_x((\mathbf{grad}\, \hat{u})(x))$, де $\hat{u} \in C^1_b(H), \hat{u}\big|_{\mathcal{M}} = u$, P_x — ортопроектор в H, $\operatorname{Im} P_x = T_x\mathcal{M}$).

Оскільки $\mathcal{M}$, як рівномірний многовид, є повним відносно внутрішньої метрики, то векторні поля на $\mathcal{M}$ класу $C^1_b(\mathcal{M})$ є повними.

Теорема 3.3. *Нехай D — обмежена область в гільбертовому просторі H, $\mathbf{N} \in C^1_{b;v}(H)$ — векторне поле в H, яке є продовженням поля зовнішньої одиничної нормалі до межі $\mathcal{M} = \partial D$ області D, хай виконується умова теореми 2.2, μ — борелівська скінченна (невід'ємна) диференційовна вздовж поля $\mathbf{N}$ міра в H, μ має повний носій,*

$\operatorname{div}_\mu \mathbf{N} \in L^\infty(H)$, σ — міра на $\mathcal{M}$, індукована мірою μ. Нехай також оператор $\mathbf{grad} : L^2(H) \supset C_b^1(H) \longrightarrow L_v^2(H)$ допускає замикання. Тоді індукований на $\mathcal{M}$ оператор

$$\mathbf{grad}_{\mathcal{M}} : L^2(\mathcal{M}, \sigma) \supset C_b^1(\mathcal{M}) \ni u \longmapsto \mathbf{grad}_{\mathcal{M}}\, u \in L_v^2(\mathcal{M}, \sigma)$$

є коректно визначеним і допускає замикання.

Доведення. Покладемо $C = \|\operatorname{div}_\mu \mathbf{N}\|_{L^\infty(H)}$. В роботі [9] (лема 2) було доведено наступне твердження: якщо $\operatorname{div}_\mu \mathbf{N} \in L^\infty(H)$, то $\mu_t \prec \mu$ для кожного $t \in \mathbb{R}$ (тут $\mu_t = \mu \circ \Phi_t$, Φ_t — потік поля $\mathbf{N}$), $\frac{d\mu_t}{d\mu} \in L^\infty(H)$ і при цьому

$$\frac{d\mu_t}{d\mu} \leqslant \mathrm{e}^{C|t|} \ (\mathrm{mod}\, \mu). \tag{3.6}$$

Для кожної борелівської множини $A \in \mathcal{B}(H)$ справедливі рівності

$$d_{\mathbf{N}}\mu_t(A) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \mu_{t+s}(A) = \int\limits_{\Phi_t A} \operatorname{div}_\mu \mathbf{N}\, d\mu.$$

Звідси $|d_{\mathbf{N}}\mu_t(A)| \leqslant C\mu(\Phi_t A) = C\mu_t(A)$, тому

$$|\operatorname{div}_{\mu_t} \mathbf{N}| \leqslant C \ (\mathrm{mod}\, \mu_t), \quad \mu \sim \mu_t, \quad \|\operatorname{div}_{\mu_t} \mathbf{N}\|_{L^\infty(H)} = \|\operatorname{div}_\mu \mathbf{N}\|_{L^\infty(H)}.$$

Далі, звідси випливає нерівність $\frac{d\mu}{d\mu_t} \leqslant \mathrm{e}^{C|t|}$ $(\mathrm{mod}\, \mu)$, і, відповідно,

$$\frac{d\mu_t}{d\mu} \geqslant \mathrm{e}^{-C|t|} \ (\mathrm{mod}\, \mu). \tag{3.7}$$

Крок 1. Доведемо повноту носія міри σ.

Нехай V — непуста відкрита множина в $\mathcal{M}$. Тоді $\Phi_{(-\infty,t)}V = \{\Phi_s x \mid s < t; x \in V\}$ — непуста відкрита множина в H.

За аналогією з формулою (3.1) має місце формула

$$\sigma(V) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mu\left(\Phi_{(-\infty,t)}V\right). \tag{3.8}$$

Далі

$$\frac{d}{dt}\mu\left(\Phi_{(-\infty,t)}V\right) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \mu\left(\Phi_{(-\infty,t+s)}V\right) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \mu_t\left(\Phi_{(-\infty,s)}V\right). \tag{3.9}$$

За рахунок нерівності (3.6) при фіксованому t функція

$$h(s)=\mu\left(\Phi_{(-\infty,s)}V\right)\mathrm{e}^{C|t|}-\mu_t\left(\Phi_{(-\infty,s)}V\right)$$

монотонно не спадає. Тому виконується нерівність

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\mu_t\left(\Phi_{(-\infty,s)}V\right)\leqslant \mathrm{e}^{C|t|}\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\mu\left(\Phi_{(-\infty,s)}V\right),$$

або, враховуючи (3.8) і (3.9), нерівність

$$\frac{d}{dt}\mu\left(\Phi_{(-\infty,t)}V\right)\leqslant \mathrm{e}^{C|t|}\sigma(V).$$

Звідси (за рахунок повноти носія міри μ)

$$0<\mu(\Phi_{(0,1)}V)=\int\limits_0^1 dt\left(\frac{d}{dt}\mu(\Phi_{(-\infty,t)}V)\right)\leqslant\sigma(V)\int\limits_0^1\mathrm{e}^{C|t|}\,dt.$$

Отже $\sigma(V)>0$ для непустої відкритої множини $V\subset\mathcal{M}$.

Крок 2. Нехай $u\in C_b^1(\mathcal{M})$. Функцію $\hat{u}:H\longrightarrow\mathbb{R}$ будуємо за наступним правилом. Нехай $\varphi\in C^\infty(\mathbb{R})$, $0\leqslant\varphi\leqslant 1$, існують $\delta>0$ і $\varepsilon\in(0,\delta)$ такі, що $\operatorname{supp}\varphi\in(-\delta,\delta)$, $\varphi(t)=1$ для $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$. Якщо $x=\Phi_t y$, $y\in\mathcal{M}$, $|t|<\delta$, то вважаємо $\hat{u}(x)=\varphi(t)u(y)$. Для інших значень $x\in H$ покладемо $\hat{u}(x)=0$.

Очевидно, $\hat{u}\in C_b^1(H)$ і відображення $C_b^1(\mathcal{M})\ni u\longmapsto\hat{u}\in C_b^1(H)$ лінійні.

Доведемо, що відображення $L^2(\mathcal{M};\sigma)\supset C_b^1(\mathcal{M})\ni u\longmapsto\hat{u}\in$ $\in L^2(H;\mu)$ є неперервним. Маємо

$$\|\hat{u}\|^2_{L^2(H)}=\int\limits_{\Phi_\delta D\setminus\Phi_{-\delta}D}\hat{u}^2\,d\mu=\int\limits_{-\delta}^{\delta}dt\left(\frac{d}{dt}\int\limits_{\Phi_t D}\hat{u}^2\,d\mu\right),\tag{3.10}$$

$$\int\limits_{\Phi_t D_1}\hat{u}^2\,d\mu=\int\limits_{D_1}(\hat{u}\circ\Phi_t)^2\,d\mu_t=\int\limits_{D_1}(\hat{u}\circ\Phi_t)^2\frac{d\mu_t}{d\mu}\,d\mu.\tag{3.11}$$

Далі використаємо наступний факт: якщо функція w невід'ємна, існує $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} \int\limits_{\Phi_t D_1} w\,d\mu$ і при достатньо малих $t > 0$ має місце вкладення $\Phi_t D_1 \supset \supset D_1$, то

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \int\limits_{\Phi_t D_1} w\,d\mu = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(\int\limits_{\Phi_t D_1} w\,d\mu - \int\limits_{D_1} w\,d\mu \right) \geqslant 0.$$

За рахунок (3.11), прийнявши $D_1 = \Phi_s D$ (при достатньо малих s і $t > 0$ має місце вкладення $\Phi_s D \subset \Phi_{t+s} D$) і використовуючи (3.6), отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int\limits_{\Phi_t D} \hat{u}\,d\mu &= \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \int\limits_{\Phi_t(\Phi_s D)} \hat{u}^2\,d\mu = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \int\limits_{\Phi_s D} (\hat{u}\circ\Phi_t)^2 \frac{d\mu_t}{d\mu}\,d\mu \leqslant \\ &\leqslant \mathrm{e}^{C|t|} \int\limits_{\mathcal{M}} (\hat{u}\circ\Phi_t)^2\,d\sigma = \mathrm{e}^{C|t|} \varphi^2(t) \int\limits_{\mathcal{M}} u^2\,d\sigma. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Тепер із (3.10) і (3.12) випливає нерівність

$$\|\hat{u}\|^2_{L^2(H)} \leqslant \int\limits_{-\delta}^{\delta} \mathrm{e}^{C|t|} \varphi^2(t)\,dt \int\limits_{\mathcal{M}} u^2\,d\sigma,$$

що доводить L^2-неперервність відображення $u \mapsto \hat{u}$.

Крок 3. Доведемо існування таких констант $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$, що для будь-якої функції $u \in C^1_b(\mathcal{M})$ виконується нерівність

$$|\!|\!| \,\mathbf{grad}\, \hat{u} |\!|\!|^2 \leqslant K_1 |\!|\!| \,\mathbf{grad}_{\mathcal{M}}\, u |\!|\!|^2 + K_2 \|u\|^2_{L^2(\mathcal{M})}. \tag{3.13}$$

Для точок x, що лежать в достатньо малому околі $\mathcal{M}$ (таких, що можуть бути представлені у вигляді $x = \Phi_t y = \Phi(t, y)$, де $t \in \mathbb{R}$, $y \in \mathcal{M}$), позначимо через $t(x)$ значення t, при якому $x = \Phi(t(x), y)$, $y \in \mathcal{M}$. Відповідно, $\Phi(-t(x), x) \in \mathcal{M}$.

$\frac{d}{dx}\Phi(-t(x), x)$ — лінійний оператор в H, образ якого — дотичний простір до $\mathcal{M}$ у відповідній точці $y = \Phi(-t(x), x)$. Тому $\frac{d}{dx}\Phi(-t(x), x)h \perp$

$\perp \mathbf{n}(\Phi(-t(x),x))$ для кожного $h \in H$, звідки отримуємо

$$\left(\frac{d}{dx}\Phi(-t(x),x)\right)^* \mathbf{n}(\Phi(-t(x),x)) = 0. \tag{3.14}$$

Далі використаємо неперервну диференційованість функції $t(\cdot)$ (випливає із теореми про неявну функцію):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\Phi(-t(x),x) &= -\frac{\partial\Phi}{\partial t}(-t(x),x)\cdot t'(x) + \frac{\partial\Phi}{\partial x}(-t(x),x) = \\ &= -\mathbf{n}(\Phi(-t(x),x))\cdot t'(x) + \frac{\partial\Phi}{\partial x}(-t(x),x),\end{aligned}$$

звідки випливає рівність

$$\left(\frac{d}{dx}\Phi(-t(x),x)\right)^* = -\,\mathbf{grad}\,t(x)\cdot\mathbf{n}^*(\Phi(-t(x),x)) + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}(-t(x),x)\right)^*. \tag{3.15}$$

Тут вектор h інтерпретуємо як оператор $\mathbb{R} \ni s \longmapsto sh \in H$. Тому

$$h_1 h_2^* : H \ni x \longmapsto (x,h_2)h_1 \in H, \quad h_1^* h_2 : \mathbb{R} \ni s \longmapsto (h_1,h_2)s \in \mathbb{R}.$$

Тепер із (3.14) і (3.15) випливає

$$\begin{aligned}-\,\mathbf{grad}\,t(x)\cdot\mathbf{n}^*(\Phi(-t(x),x))\cdot\mathbf{n}(\Phi(-t(x),x)) + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}(-t(x),x)\right)^*\cdot \\ \cdot\,\mathbf{n}(\Phi(-t(x),x)) = 0.\end{aligned} \tag{3.16}$$

Оскільки $\mathbf{n}^*(y)\mathbf{n}(y) = \|\mathbf{n}(y)\|^2 = 1$ (тут $y \in \mathcal{M}$), із (3.16) отримаємо

$$\mathbf{grad}\,t(x) = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}(-t(x),x)\right)^* \mathbf{n}(\Phi(-t(x),x)). \tag{3.17}$$

Для точок x вигляду $x = \Phi(t,y)$ ($y \in \mathcal{M}$) маємо

$$\hat{u}(x) = \varphi(t(x))u(\Phi(-t(x),x)),$$

$$\begin{aligned}\hat{u}'(x) = \varphi'(t(x))t'(x)u(\Phi(-t(x),x)) + \\ + \varphi(t(x))u'(\Phi(-t(x),x))\frac{d}{dx}\Phi(-t(x),x).\end{aligned}$$

Тому, враховуючи (3.15), (3.17) і рівність $\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t,x) = \mathbf{n}(\Phi(t,x))$, знаходимо

$$\begin{aligned}\mathbf{grad}\,\hat{u}(x) = \varphi'(t(x))u(\Phi(-t(x),x))\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}(-t(x),x)\right)^{*}\mathbf{n}(\Phi(-t(x),x))+\\ + \varphi(t(x))\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}(-t(x),x)\right)^{*} -\\ - \mathbf{grad}\,t(x)\cdot\mathbf{n}^{*}(\Phi(-t(x),x))\cdot\mathbf{grad}\,u(\Phi(-t(x),x)),\end{aligned}$$

звідки, враховуючи рівність, справедливу для $y \in \mathcal{M}$,

$$\mathbf{n}^{*}(y)\,\mathbf{grad}\,u(y) = (\mathbf{grad}\,u(y), \mathbf{n}(y)) = 0,$$

отримуємо

$$\begin{aligned}\mathbf{grad}\,\hat{u}(x) = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}(-t(x),x)\right)^{*}(\varphi(t(x))\,\mathbf{grad}\,u(\Phi(-t(x),x)))+\\ + \varphi'(t(x))u(\Phi(-t(x),x))\mathbf{n}(\Phi(-t(x),x)).\end{aligned} \tag{3.18}$$

Відмітимо, що при достатньо малих t для всіх $x \in H$ має місце оцінка $\left\|\frac{\partial}{\partial x}\Phi_t x\right\| \leqslant 2$. Доведення цього факту міститься у кроці 5.

Тому при достатньо малому $\delta > 0$ із (3.18) при $|t| < \delta$ і $y \in \mathcal{M}$ випливає нерівність

$$\|\,\mathbf{grad}\,\hat{u}(\Phi_t y)\| \leqslant 2(\varphi(t)\|\,\mathbf{grad}_{\mathcal{M}}\,u(y)\| + |\varphi'(t)|\cdot|u(y)|). \tag{3.19}$$

Тепер за аналогією з кроком 2 (див. (3.12)) із (3.19) отримуємо

$$\int\limits_{H}\|\,\mathbf{grad}\,\hat{u}\|^2\,d\mu = \int\limits_{-\delta}^{\delta} dt\left(\frac{d}{dt}\int\limits_{\Phi_t D}\|\,\mathbf{grad}\,\hat{u}\|^2\,d\mu\right) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\delta}^{\delta} dt \int\limits_{\mathcal{M}} \mathrm{e}^{C|t|} 8(\varphi^2(t)\|\,\mathbf{grad}_{\mathcal{M}}\,u\|^2 + (\varphi'(t))^2 u^2)\,d\sigma =$$

$$= 8\int\limits_{-\delta}^{\delta}\mathrm{e}^{C|t|}\varphi^2(t)\,dt\int\limits_{\mathcal{M}}\|\,\mathbf{grad}_{\mathcal{M}}\,u\|^2\,d\sigma + 8\int\limits_{-\delta}^{\delta}\mathrm{e}^{C|t|}(\varphi'(t))^2\,dt\int\limits_{\mathcal{M}}u^2\,d\sigma,$$

звідки і випливає оцінка (3.13).

Крок 4. Нехай послідовність функцій $u_m \in C_b^1(\mathcal{M})$ збігається до 0 в $L^2(\mathcal{M})$, $\mathbf{grad}_{\mathcal{M}}\, u_m \to \mathbf{Z}$ в $L_v^2(\mathcal{M})$. Доведемо факт існування замикання $\mathbf{grad}_{\mathcal{M}}$ показавши, що $\mathbf{Z} = 0 \pmod{\sigma}$.

За рахунок доведеного вище для послідовності функцій $\hat{u}_m$ мають місце збіжності $\hat{u}_m \to 0$ в $L^2(H)$, $\mathbf{grad}\, \hat{u}_m \to \mathbf{W}$ в $L_v^2(H)$. Із існування замикання оператора $\mathbf{grad}$ випливає рівність $\mathbf{W} = 0 \pmod{\mu}$.

$\varphi(t) = 1$ при $|t| < \varepsilon$, тому для $y \in \mathcal{M}$ при $|t| < \varepsilon$ із (3.18) отримуємо рівність

$$\mathbf{grad}_{\mathcal{M}}\, u(y) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(-t, \Phi_t y)\right)^* \mathbf{grad}\, \hat{u}(\Phi_t y),$$

Звідки випливає нерівність

$$\|\,\mathbf{grad}_{\mathcal{M}}\, u(y)\| \leqslant \left\|\frac{\partial \Phi}{\partial x}(-t, \Phi_t y)\right\| \cdot \|\,\mathbf{grad}\, \hat{u}(\Phi_t y)\|. \tag{3.20}$$

Далі (див. крок 5) буде доведено, що при достатньо малих t при всіх $x \in H$ виконується нерівність $\left\|\frac{\partial \Phi}{\partial x}(t, x)\right\| \leqslant 2$.

Тому при достатньо малому $\delta > 0$ (і, відповідно, $\varepsilon > 0$) при всіх $t \in$ $\in (-\varepsilon, \varepsilon)$ і $x \in \mathcal{M}$ із (3.20) випливає нерівність

$$\|\,\mathbf{grad}\, \hat{u}(\Phi_t x)\| \geqslant \frac{1}{2}\|\,\mathbf{grad}_{\mathcal{M}}\, u(x)\|. \tag{3.21}$$

Звідси

$$\int\limits_H \|\,\mathbf{grad}\, \hat{u}\|^2\, d\mu \geqslant \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dt \left(\frac{d}{dt} \int\limits_{\Phi_t D} \|\,\mathbf{grad}\, \hat{u}\|^2\, d\mu\right) =$$

$$= \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \int\limits_{\Phi_s D} (\|\,\mathbf{grad}\, \hat{u}\|^2 \circ \Phi_t) \frac{d\mu_t}{d\mu}\, d\mu\right) dt \geqslant$$

$$\geqslant \ \left[\text{за рахунок (3.7) і (3.21)}\right] \ \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int\limits_{\mathcal{M}} \frac{1}{4} \mathrm{e}^{-C|t|} \|\,\mathbf{grad}_{\mathcal{M}}\, t\|^2\, d\sigma = \frac{1}{4} \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \mathrm{e}^{-C|t|}\, dt \int\limits_{\mathcal{M}} \|\,\mathbf{grad}_{\mathcal{M}}\, t\|^2\, d\sigma.$$

Тому існує така константа $K > 0$, що для всіх $u \in C_b^1(\mathcal{M})$ має місце оцінка

$$\|\!| \mathbf{grad}\, \hat{u} \|\!| \geqslant K \|\!| \mathbf{grad}_{\mathcal{M}}\, u \|\!|,$$

що і дає бажаний результат.

Крок 5. Для кожної фіксованої точки $x \in H$ однопараметрична операторна сім'я $\left\{\frac{\partial}{\partial x}\Phi_t x\right\}$ задовольняє рівняння $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi_t x\right) = \mathbf{N}'(\Phi_t x)\frac{\partial}{\partial x}\Phi_t x$ і початкову умову $\frac{\partial}{\partial x}\Phi_t x = \mathrm{I}$. Таким чином $X(t) = \frac{\partial}{\partial x}\Phi_t x$ є розв'язком задачі Коші

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}X(t) &= A(t)X(t), \\ X(0) &= \mathrm{I}, \end{aligned}$$

де $A(t) = \mathbf{N}'(\Phi_t x)$.

Відповідно до вимоги до поля $\mathbf{N}$, $\sup\limits_H \|\mathbf{N}'(\cdot)\| < \infty$, тому, за рахунок оцінки $\|X(t)\| \leqslant \exp\left(\int\limits_0^t \|A(\tau)\|\, d\tau\right)$ (див. [20]), робимо висновок щодо існування $\delta > 0$, для якого при всіх $t \in (-\delta, \delta)$ і $x \in H$ справедлива оцінка

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x}\Phi_t x\right\| \leqslant 2.$$

□

3.4 Задача Діріхле

Розглянемо приклад задачі Діріхле для рівняння з лапласіаном в обмеженній області на рімановому многовиді. Подібна задача в класичному скінченновимірному випадку наведена, наприклад, в [26], а в випадку гільбертового простору досліджується в роботі [15].

Далі вважаємо, що виконуються наступні умови:

а) векторне поле $\mathbf{n}$ є повним і міра σ диференційовна вздовж поля $\mathbf{n}$ (узгодженність S і σ);

б) $\operatorname{div}_\sigma \mathbf{n} \in L^\infty(\mathcal{M})$;

в) оператор $\mathbf{grad}_G$ допускає замикання;

Виконання цих умов дозволяє коректно ввести оператори $\overline{\mathbf{grad}}_G$; Δ_G, а також оператор сліду $\gamma : L^2(G) \longrightarrow L^2(S)$ з областю визначення $\mathcal{D}\left(\overline{\mathbf{grad}}_G\right)$.

Нехай $a(\cdot) \in C(G), a(x) \geqslant \alpha > 0 \,\forall x \in \overline{G}$, $f \in L^2(G)$, $\varphi \in \gamma(\mathcal{D}(\Delta_G))$. Розглянемо задачу пошуку функції $u \in \mathcal{D}(\Delta_G)$, що задовольняє рівняння

$$\Delta_G u - a \cdot u = f \tag{3.22}$$

і крайову умову

$$\gamma(u) = \varphi. \tag{3.23}$$

Поставлена задача розв'язується за класичною схемою.

Спочатку розглянемо випадок $\varphi = 0$. Оскільки $C_0^1(G)$ щільна в $L^2(G)$ і $\operatorname{Ker}\gamma \supset C_0^1(G)$, функція u є розв'язком задачі (3.22), (3.23) з $\varphi = 0$ тоді і тільки тоді коли $u \in \operatorname{Ker}\gamma$ і для всіх $v \in \operatorname{Ker}\gamma$ задовольняє рівняння

$$\int\limits_G v(\Delta_G u - a \cdot u)\, d\sigma = \int\limits_G vf\, d\sigma$$

або, що еквівалентно, рівняння

$$\int\limits_G \left(\left(\overline{\mathbf{grad}}_G\, u, \overline{\mathbf{grad}}_G\, v\right) + auv\right)\, d\sigma = -\int\limits_G vf\, d\sigma. \tag{3.24}$$

Ліва частина рівняння (3.24) є скалярним добутком $(u, v)_1$ в просторі $\mathcal{D}\left(\overline{\mathbf{grad}}_G\right)$, і відповідна норма $\|\cdot\|_1$ еквівалентна нормі графіка. При цьому існує таке число $C > 0$, що при всіх $v \in \operatorname{Ker}\gamma$ виконуються нерівності

$$\left|\int\limits_G vf\, d\sigma\right| \leqslant \|f\|_{L^2(G)}\|v\|_{L^2(G)} \leqslant \|f\|_{L^2(G)} C\|v\|_1.$$

В гільбертовому просторі $(\operatorname{Ker}\gamma, (\cdot,\cdot)_1)$ використаємо теорему Ріса, згідно якій існує, і притому єдина, функція $u \in \operatorname{Ker}\gamma$, що при всіх $v \in \operatorname{Ker}\gamma$ задовольняє рівняння (3.24).

Якщо тепер $u \in \operatorname{Ker}\gamma$ задовольняє рівняння (3.24) при всіх $v \in \in \operatorname{Ker}\gamma$, то, записуючи рівняння (3.24) у вигляді

$$\int\limits_G \left(\overline{\mathbf{grad}}_G\, u, \overline{\mathbf{grad}}_G\, v\right)\, d\sigma = -\int\limits_G v(f + a\cdot u)\, d\sigma,$$

робимо висновок, що $\overline{\mathbf{grad}}_G\, u \in \mathcal{D}(\operatorname{div}_G)$, і при цьому виконуються рівності $\Delta_G u = \operatorname{div}_G\left(\overline{\mathbf{grad}}_G\, u\right) = f + au$.

Тим самим для граничної умови $\gamma(u) = 0$ доведено існування і єдиність розв'язку крайової задачі (3.22), (3.23).

Якщо $\varphi \in \gamma(\mathcal{D}(\Delta_G))$, то існує функція $w \in \mathcal{D}(\Delta_G)$, для якої $\varphi = \gamma(w)$. В цьому випадку функція $u_1 = u - w$ повинна задовольняти задачу

$$\begin{aligned} &\Delta_G u_1 - a\cdot u_1 = f - \Delta_G w + a\cdot w \in L^2(G),\\ &\gamma(u_1) = 0, \end{aligned}$$

існування і єдиність розв'язку якої обґрунтовано вище.

Таким чином доведена наступна теорема.

Теорема 3.4. *При виконанні технічних умов а)–в) задача* (3.22), (3.23) *в області ріманового многовиду має, і притому єдиний, розв'язок.*

В підрозділі 3.3 в якості нетривіального модельного прикладу ріманового многовиду $\mathcal{M}$ була розглянута межа області D гільбертового простору H. Відповідна борелівська міра σ на $\mathcal{M}$ мала повний носій, при цьому $\mathcal{M}$ є повним метричним простором відносно внутрішньої метрики. Тому будь-яке векторне поле на $\mathcal{M}$ класу $C^1_{b;v}(\mathcal{M})$ є повним. Крім того, оператор $\mathbf{grad}_{\mathcal{M}} : L^2(\mathcal{M}, \sigma) \longrightarrow L^2_v(\mathcal{M}, \sigma)$ допускає замикання.

З іншого боку, якщо G — обмежена область в $\mathcal{M}$ і відповідне векторне поле не узгоджено з $S = \partial G$, то до міри σ може бути застосована процедура згладжування міри вздовж поля $\mathbf{n}$ (див. [15]). При цьому будується міра σ_φ на $(\mathcal{M}, \mathcal{B}(\mathcal{M}))$ за правилом

$$\sigma_\varphi(A) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t)\sigma(\Phi_t^{\mathbf{n}} A)\, dt,$$

де $A \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi \geqslant 0$, $\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, dt < \infty$.

Отримана міра σ_φ узгоджена з S. Якщо при цьому існує константа $C > 0$, для якої при всіх s має місце нерівність $|\varphi'(s)| \leqslant C\varphi(s)$ (наприклад, $\varphi(s) = \frac{1}{1+s^2}$), то $\operatorname{div}_{\sigma_\varphi} \in L^\infty(\mathcal{M}, \sigma_\varphi)$.

Перехід до міри σ_φ зберігає також властивості повноти носія міри і існування замикання оператора $\mathbf{grad}_{\mathcal{M}} : L^2(\mathcal{M}, \sigma_\varphi) \longrightarrow L^2_v(\mathcal{M}, \sigma_\varphi)$ (ці факти в [15] доведені для випадку гільбертового простору, але у випадку ріманового многовиду доведення повністю аналогічне). Тому для міри σ_φ виконуються властивості а), б) і залишається лише довести властивість в) — існування замикання оператора $\mathbf{grad}_G$, що і реалізується в наведеній нижче теоремі 3.5.

Теорема 3.5. *Нехай $\mathcal{M}$ — ріманів многовид класу C^2, σ — скінченна борелівська міра на $\mathcal{M}$ з повним носієм, оператор* $\mathbf{grad} = \mathbf{grad}_{\mathcal{M}} : L^2(\mathcal{M}, \sigma) \supset C^1_b(\mathcal{M}) \ni u \longmapsto \mathbf{grad}\, u \in L^2_v(\mathcal{M}, \sigma)$ *допускає замикання. G — обмежена область в $\mathcal{M}$, межа якої узгоджена з мірою σ, і для відповідного векторного поля $\mathbf{n} \in C^1_b(\mathcal{M})$ (продовження поля одиничної зовнішньої нормалі до $S = \partial G$) $\operatorname{div}_\sigma \mathbf{n} \in L^\infty(\sigma)$. Для $u \in C^1(G)$ покладемо $\mathbf{grad}_G\, u = (\mathbf{grad}\, \tilde{u})\big|_G$ ($\tilde{u} \in C^1_b(\mathcal{M})$ — продовження u на $\mathcal{M}$). Тоді оператор $\mathbf{grad}_G : L^2(G;\sigma) \supset C^1(G) \ni u \longmapsto \mathbf{grad}_G\, u \in L^2_v(G;\sigma)$ допускає замикання.*

Доведення. Крок 1. Нехай $u_m \in C^1(G)$, $u_m \to 0$ в $L^2(G)$, $\mathbf{grad}_G\, u_m \to \mathbf{Z}$ в $L^2_v(G;\sigma)$. Побудуємо функції $\tilde{u}_m \in C^1_b(\mathcal{M})$ за наступною схемою. Нехай $\varphi_m \in C^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leqslant \varphi_m \leqslant 1$, $\delta_m > 0$, $\varphi_m(t) = 0$ при $t \geqslant \delta_m$, $\varphi_m(t) = 1$ при $t \leqslant 0$, $\varphi'_m(0) = 0$. Якщо $x = \Phi_t y$ (тут і в подальшому в цьому підрозділі Φ_t — потік поля $\mathbf{n}$), $y \in S = \partial G$, $0 \leqslant t \leqslant \delta_m$, то покладаємо $\tilde{u}_m(x) = \varphi_m(t) u_m(\Phi_{-2t} x)$ $(= \varphi_m(t(x)) u_m(\Phi(-2t(x), x)))$; для інших значень x покладаємо $\tilde{u}_m(x) = 0$ для $x \notin G$ і $\tilde{u}_m(x) = u(x)$ для $x \in G$. Тоді $\tilde{u}_m\big|_G = u_m$, $\tilde{u}_m \in C_b^1(\mathcal{M})$.

Доведемо, що при правильному виборі послідовності δ_m досягаються збіжності $\int\limits_{\mathcal{M}\setminus G} \tilde{u}_m^2\, d\sigma \to 0$, $\int\limits_{\mathcal{M}\setminus G} \|\,\mathbf{grad}\, \tilde{u}_m\|^2\, d\sigma \to 0$.

Крок 2. За аналогією з доведенням теореми 3.3 (формули (3.10), (3.11)) отримаємо

$$\int\limits_{\mathcal{M}\setminus G} \tilde{u}_m^2\, d\sigma = \int\limits_{\Phi_{\delta_m} G\setminus G} \tilde{u}_m^2\, d\sigma = \int\limits_0^{\delta_m} \left(\frac{d}{dt} \int\limits_{\Phi_t G} \tilde{u}_m^2\, d\sigma \right), \tag{3.25}$$

$$\int\limits_{\Phi_{2t} G_1} \tilde{u}_m^2\, d\sigma = \int\limits_{G_1} (\tilde{u}_m \circ \Phi_{2t})^2\, d\sigma_{2t} = \int\limits_{G_1} (\tilde{u}_m \circ \Phi_{2t})^2 \frac{d\sigma_{2t}}{d\sigma}\, d\sigma. \tag{3.26}$$

Використовуючи рівність (3.26) до області $G_1 = \Phi_{-t+s} G$, отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int\limits_{\Phi_t G} \tilde{u}_m^2\, d\sigma &= \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \int\limits_{\Phi_{2t}(\Phi_{-t+s} G)} \tilde{u}_m^2\, d\sigma = \\ &= \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \int\limits_{\Phi_{-t+s} G} (\tilde{u}_m \circ \Phi_{2t})^2 \frac{d\sigma_{2t}}{d\sigma}\, d\sigma \leqslant \\ &\leqslant \mathrm{e}^{2C|t|} \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \int\limits_{\Phi_{-t+s} G} (\tilde{u}_m \circ \Phi_{2t})^2\, d\sigma. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Тут $C = \|\operatorname{div}_G \mathbf{n}\|_{L^\infty(\mathcal{M},\sigma)}$.

Нехай $S_{-t} = \partial(\Phi_{-t} G)$. Поле $\mathbf{n}$, взагалі кажучи, не є нормальним до поверхні S_{-t}. Однак, (при достатньо малих t) $\mathbf{n}$ трансверсальне по відношенню до S_{-t}, що, за рахунок результатів роботи [8], доводить існування на S_{-t} поверхневої міри τ_{-t}, асоційованої з мірою σ. В цьому випадку для функцій $v_1, v_2 \in C_b(\mathcal{M})$, що співпадають на S_{-t}, випливає існування похідних і рівність

$$\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \int\limits_{\Phi_{-t+s} G} v_1\, d\sigma = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \int\limits_{\Phi_{-t+s} G} v_2\, d\sigma$$

(перевірка цього факту аналогічна доведенню леми 4 із роботи [9]).

Оскільки функції $v_1 = (\tilde{u}_m \circ \Phi_{2t})^2 \in C_b(\mathcal{M})$ і $v_2 = \varphi_m^2(t)u_m^2 \in C_b(\mathcal{M})$ співпадають на S_{-t}, то

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \int\limits_{\Phi_{-t+s}G} (\tilde{u}_m \circ \Phi_{2t})^2 \, d\sigma = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \int\limits_{\Phi_{-t+s}G} \varphi_m^2(t)u_m^2 \, d\sigma. \tag{3.28}$$

Тепер з (3.25), (3.27), (3.28) отримуємо

$$\int\limits_{\mathcal{M}\setminus G} \tilde{u}_m^2 \, d\sigma \leqslant \int\limits_0^{\delta_m} \left(\mathrm{e}^{2C|t|}\varphi_m^2(t) \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \int\limits_{\Phi_{-t+s}G} u_m^2 \, d\sigma \right) dt \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{e}^{2C\delta_m} \int\limits_0^{\delta_m} dt \frac{d}{dt} \int\limits_{\Phi_{-t}G} u_m^2 \, d\sigma = \mathrm{e}^{2C\delta_m} \int\limits_{-\delta_m}^{0} \left(\frac{d}{dt} \int\limits_{\Phi_t G} u_m^2 \, d\sigma \right) dt =$$

$$= \mathrm{e}^{2C\delta_m} \int\limits_{G\setminus \Phi_{-\delta_m}G} u_m^2 \, d\mu \to 0, \quad m \to \infty$$

(тут достатньо лише обмеженості послідовності δ_m).

Крок 3. За аналогією з кроком 3 доведення теореми 3.3 маємо (далі $x \in \mathcal{M} \setminus G$)

$$\mathbf{grad}\, \tilde{u}_m(x) = (\tilde{u}_m'(x))^* = [(\varphi_m(t(x)))u_m(\Phi(-2t(x), x))]^* =$$

$$= \Big[\varphi_m'(t(x))t'(x)u_m(\Phi(-2t(x), x)) + \varphi_m(t(x))\frac{d}{dx}u_m(\Phi(-2t(x), x))\Big]^* =$$

$$= \varphi_m'(t(x))u_m(\Phi(-2t(x), x))\, \mathbf{grad}\, t(x) + \varphi_m(t(x))\cdot$$

$$\cdot \left[u_m'(\Phi(-2t(x), x)) \left(-2\frac{\partial \Phi}{\partial t}(-2t(x), x)t'(x) + \frac{\partial \Phi}{\partial x}(-2t(x), x) \right)\right]^* =$$

$$= \varphi_m'(t(x))u_m(\Phi(-2t(x), x))\, \mathbf{grad}\, t(x) +$$

$$+ \varphi_m(t(x)) \left(-2\, \mathbf{grad}\, t(x)\mathbf{n}^*(-2t(x), x) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(-2t(x), x) \right)^* \right) \cdot$$

$$\cdot\, \mathbf{grad}\, u_m(\Phi(-2t(x), x)). \tag{3.29}$$

Тут, як і при доведенні теореми 3.3, використовується інтерпретація вектора v із дотичного простору $T_p\mathcal{M}$ як лінійного оператора $v : \mathbb{R} \longrightarrow \longrightarrow T_p\mathcal{M}$ і, відповідно, $v^* : T_p\mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$. Якщо $v_1 \in T_q\mathcal{M}$, $v_2 \in T_p\mathcal{M}$, то $v_1 \cdot v_2^*$ — лінійний оператор із $T_p\mathcal{M}$ в $T_q\mathcal{M}$, що діє за правилом $v_1 v_2^* : h \longmapsto (h, v_2)v_1$. Нагадаємо також, що $\frac{\partial\Phi}{\partial x}(t,x)$ — лінійний оператор із $T_x\mathcal{M}$ у $T_{\Phi_t x}\mathcal{M}$.

Оскільки формула (3.17) зберігається і в випадку ріманового многовиду, із цієї формули і (3.29) отримуємо

$$\mathbf{grad}\,\tilde{u}_m(x) = \varphi_m'(t(x))u_m\left(\Phi(-2t(x),x)\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}(-t(x),x)\right)^* \cdot$$

$$\cdot\mathbf{n}\left(\Phi(-t(x),x)\right) + \varphi_m(t(x))\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}(-2t(x),x)\right)^* - 2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}(-t(x),x)\right)^* \cdot$$

$$\cdot\,\mathbf{n}\left(\Phi(-t(x),x)\right)\mathbf{n}^*\left(\Phi(-2t(x),x)\right)\mathbf{grad}\,u_m\left(\Phi(-2t(x),x)\right). \qquad (3.30)$$

При достатньо малих δ_m при всіх $x \in \mathcal{M}$ і $t(x) \in (0, \delta_m)$ виконуються нерівності $\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial x}(-t(x),x)\right\| \leqslant 2$, $\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial x}(-2t(x),x)\right\| \leqslant 2$ (відповідне доведення повністю повторює крок 5 доведення теореми 3.3), а також $\|\mathbf{n}(\Phi(-t(x),x))\mathbf{n}^*(\Phi(-2t(x),x))\| \leqslant 2$ (випливає з умови $\sup\limits_{\mathcal{M}}\|\mathbf{n}'(\cdot)\| < < \infty$). Функції φ_m підбираємо таким чином, щоб для всіх $t \in \mathbb{R}$ виконувалася нерівність $|\varphi_m'(t)| \leqslant \frac{2}{\delta_m}$.

Тоді із (3.30) отримуємо (для всіх $s \in \mathcal{M} \setminus G$)

$$\|\,\mathbf{grad}\,\tilde{u}_m(x)\| \leqslant \frac{4}{\delta_m}|u_m\left(\Phi(-2t(x),x)\right)| + 10\|\,\mathbf{grad}\,u_m\left(\Phi(-2t(x),x)\right)\|,$$

звідки випливає

$$\|\,\mathbf{grad}\,\tilde{u}_m(x)\|^2 \leqslant \frac{32}{\delta_m^2}u_m^2\left(\Phi(-2t(x),x)\right) + \\ + 200\|\,\mathbf{grad}\,u_m\left(\Phi(-2t(x),x)\right)\|^2.$$

Далі, за аналогією з кроком 2 маємо

$$\int\limits_{\mathcal{M}\setminus G}\|\,\mathbf{grad}\,\tilde{u}_m\|^2\,d\sigma = \int\limits_0^{\delta_m}dt\frac{d}{dt}\int\limits_{\Phi_t G}\|\,\mathbf{grad}\,\tilde{u}_m\|^2\,d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{\delta_m} \mathrm{e}^{2C|t|} dt \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \int\limits_{\Phi_{-t+s}G} \|\,\mathbf{grad}\,\tilde{u}_m\|^2 \circ \Phi_{2t}\, d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{e}^{2C\delta_m} \int\limits_{-\delta_m}^{0} dt \frac{d}{dt} \int\limits_{\Phi_t G} \frac{32}{\delta_m^2} u_m^2 + 200\|\,\mathbf{grad}\, u_m\|^2 \, d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant \frac{32}{\delta_m^2} \mathrm{e}^{2C\delta_m} \|u_m\|^2_{L^2(G)} + 200\mathrm{e}^{2C\delta_m} \int\limits_{G\setminus\Phi_{-\delta_m}G} \|\,\mathbf{grad}\, u_m\|^2 \, d\sigma. \tag{3.31}$$

Візьмемо $\delta_m = \|u_m\|^{1/2}_{L^2(G)}$. Тоді перший доданок в правій частині нерівності (3.31) прямує до 0 при $m \to \infty$. А зі збіжності $\|\,\mathbf{grad}_G\, u_m\|^2 \to \to \|\mathbf{Z}\|^2$ в $L^1(G;\sigma)$ випливає рівномірна абсолютна неперервність інтегралів від функцій $\|\,\mathbf{grad}_G\, u_m\|^2$. Тому і другий доданок в правій частині нерівності (3.31) також прямує до нуля.

Нехай тепер векторне поле $\mathbf{W} \in L^2_v(\mathcal{M};\sigma)$ визначено умовою $\mathbf{W}(x) = = \mathbf{Z}(x)$ при $x \in G$ і $\mathbf{W}(x) = 0$ при $x \notin G$. За рахунок доведеного вище, $\tilde{u}_m \to 0$ в $L^2(\mathcal{M})$, $\mathbf{grad}\,\tilde{u}_m \to \mathbf{W}$ в $L^2_v(\mathcal{M})$. Але оскільки оператор $\mathbf{grad}$ допускає замикання, то $\mathbf{W} = 0 \pmod{\sigma}$. Звідси випливає рівність $\mathbf{Z} = = 0 \ (\mathrm{mod}\, \sigma\big|_G)$, що і доводить існування замикання оператора $\mathbf{grad}_G$. □

3.5 Деякі технічні твердження

В цьому підрозділі наведемо доведення деяких технічних тверджень, що були використані в підрозділах 3.2–3.4.

Твердження 3.2. *У випадку, коли* $\mathrm{div}_\sigma\, \mathbf{n} \in L^\infty(\mathcal{M})$ *(або, хоча б* $\mathrm{div}_\sigma\, \mathbf{n}\big|_G \in L^\infty(G)$*), існує константа* $C > 0$*, для якої при всіх* $u \in C^1(G)$ *виконується нерівність*

$$\left\|u\big|_S\right\|_{L^2(S,\tau)} \leqslant C \left(\left\|u\right\|_{L^2(G)} + \left\|\!\left|\,\mathbf{grad}\, u\right|\!\right\|_{L^2_v(G)} \right).$$

Доведення. Згідно (3.2), виконується

$$\left\|u\big|_S\right\|_{L^2(S,\tau)} = \left(\int\limits_S u^2 d\tau\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\int\limits_G (\mathbf{grad}(u^2), \mathbf{n})\, d\sigma + \int\limits_G u^2 \cdot \operatorname{div}_G \mathbf{n}\, d\sigma\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_G |(\mathbf{grad}(u^2), \mathbf{n})|\, d\sigma\right)^{1/2} + \left(\int\limits_G |u^2 \cdot \operatorname{div}_G \mathbf{n}|\, d\sigma\right)^{1/2}.$$

Згідно нерівності Коші-Буняковського, $|(\mathbf{grad}(u^2), \mathbf{n})| \leqslant \|\,\mathbf{grad}(u^2)\| \cdot$ $\cdot \|\mathbf{n}\|$, а оскільки $\mathbf{n} \in C^1_{b;v}(\mathcal{M})$ та $\mathbf{grad}(u^2) = 2u\,\mathbf{grad}\,u$, то $\|\,\mathbf{grad}(u^2)\| \cdot$ $\cdot \|\mathbf{n}\| \leqslant 2C_1|u| \cdot \|\,\mathbf{grad}\,u\| \leqslant C_1(u^2 + \|\,\mathbf{grad}\,u\|^2)$, де $C_1 > 0$ не залежить від u. Отже

$$\left(\int\limits_G |(\mathbf{grad}(u^2), \mathbf{n})|\, d\sigma\right)^{1/2} \leqslant \sqrt{C_1}\left(\int\limits_G u^2\, d\sigma + \int\limits_G \|\,\mathbf{grad}\,u\|^2\, d\sigma\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{C_1}\left(\int\limits_G u^2\, d\sigma\right)^{1/2} + \sqrt{C_1}\left(\int\limits_G \|\,\mathbf{grad}\,u\|^2\, d\sigma\right)^{1/2} =$$

$$= \sqrt{C_1}\left\|u\right\|_{L^2(G)} + \sqrt{C_1}|\!|\!|\,\mathbf{grad}\,u|\!|\!|_{L^2_v(G)}.$$

Оскільки ж $\operatorname{div}_\sigma \mathbf{n}\big|_G \in L^\infty(G)$, то

$$\left(\int\limits_G |u^2 \cdot \operatorname{div}_G \mathbf{n}|\, d\sigma\right)^{1/2} \leqslant \sqrt{C_2}\left(\int\limits_G u^2\, d\sigma\right)^{1/2} = \sqrt{C_2}\left\|u\right\|_{L^2(G)},$$

де $C_2 = \|\operatorname{div}_G \mathbf{n}\big|_G\|_{L^\infty(G)} \geqslant 0$ не залежить від u. Нарешті

$$\left\|u\big|_S\right\|_{L^2(S,\tau)} \leqslant (\sqrt{C_1} + \sqrt{C_2})\left\|u\right\|_{L^2(G)} + \sqrt{C_1}|\!|\!|\,\mathbf{grad}\,u|\!|\!|_{L^2_v(G)} \leqslant$$

$$\leqslant (\sqrt{C_1} + \sqrt{C_2})\left(\left\|u\right\|_{L^2(G)} + |\!|\!|\,\mathbf{grad}\,u|\!|\!|_{L^2_v(G)}\right).$$

$\square$

Наступне твердження є аналогом твердження роботи [10], у якому розглядається випадок сепарабельного гільбертового простору, для випадку сепарабельного ріманового многовиду.

Твердження 3.3. *Нехай G – область в $\mathcal{M}$ така, що $\sigma(\partial G) = 0$. Тоді $C_0^1(G)$ щільно в $L^2(G)$.*

Доведення. Достатньо показати, що для кожного $\alpha > 0$ і будь-якої борелівської множини $A \subset G \setminus (\partial G)_\alpha$ (C_α – α-окіл множини C) індикатор j_A множини A може бути апроксимованим в $L^2(G)$ функціями з $C_0^1(G)$. При цьому за рахунок радоновості міри σ ($\mathcal{M}$ є повним сепарабельним метричним простором), в якості A можна взяти компакт.

Фіксуємо $\delta > 0$. Тоді знайдеться $\beta \in (0, \frac{\alpha}{2})$ таке, що $\sigma(A_{2\beta} \setminus A) < \delta$ (A замкнена, а тому $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{1/n}$). Завдяки компактності A, існує множина B — об'єднання скінченої кількості куль радіуса β : $\bigcup\limits_{k=1}^{m} B(x_k; \beta)$ (кожна точка x_k лежить в A), для якого $A \subset B \subset B_\beta \subset A_{2\beta} \subset G$, а за рахунок нерівності $\sigma(A_{2\beta} \setminus A) < \delta$, достатньо для кожного $\varepsilon \in (0, \frac{\beta}{2})$ вміти будувати функцію $u \in C_0^1(G)$, для якої $|u(x) - 1| < \varepsilon$ для $x \in B$; $u(x) = 0$ ззовні $B_{2\varepsilon}$.

Для одної кулі $B(x_k; \varepsilon) = \{x \,|\, \|x - x_k\| < \varepsilon\}$ візьмемо функцію $v_k(x) = h(\|x - x_k\|)$; $h \in C^1(\mathbb{R})$; $h(t) = 1$ при $t \leqslant \varepsilon$; $h(t) = 0$ при $t > 2\varepsilon$; $0 \leqslant h(t) \leqslant 1$ при всіх $t \in \mathbb{R}$. Нехай $f(\vec{y}) = \max\{y_1, \dots, y_m\}$ – функція на $\mathbb{R}^m$. Тоді $f \in C(\mathbb{R}^m)$; $f(\vec{0}) = 0$. Нехай $g \in C^1(\mathbb{R}^m)$ і при цьому $g(\vec{0}) = f(\vec{0}) = 0$; $|g(\vec{y}) - f(\vec{y})| < \varepsilon$ для кожного $\vec{y} \in \{\vec{y} \mid 0 \leqslant y_k \leqslant 1, k = 1, \dots, m\}$. Тоді $u(x) = g(v_1(x), \dots, v_m(x))$ задовольняє наведені вимоги. □

3.6 Висновки до розділу 3

В цьому розділі запропоновано L^2-версію лапласіана за мірою на (нескінченновимірному) рімановому многовиді. Доведено коректність задачі Діріхле для рівнянь з уведеним лапласіаном в області ріманова многовиду певного класу. Під коректністю задачі розуміється існування та єдиність розв'язку задачі.

Наведено модельний приклад рівномірного ріманового многовиду, для якого реалізуються всі умови, використанні при доведенні коректності наведеної задачі Діріхле.

Вводяться до розгляду простори L_v^p векторних полів з використанням конструкції, подібної до інтегровності за Бохнером. Доведено, що вимірний векторний простір лежить в L_v^p в тому і тільки тому разі коли його норма лежить в функціональному просторі L^p. Доведена повнота просторів L_v^p. Повнота простору L_v^2 використовується зокрема при побудові лапласіана.

РОЗДІЛ 4. КРАЙОВА ЗАДАЧА, АСОЦІЙОВАНА З ДИФЕОМОРФІЗМОМ МІЖ РІМАНОВИМИ МНОГОВИДАМИ

В цьому розділі $\mathcal{M}_1$ і $\mathcal{M}_2$ — сепарабельні ріманові многовиди класу C^2 з рівномірними атласами Ω_1 і Ω_2, відповідно; $F : \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2$ — обмежений дифеоморфізм між ними, тобто, існує таке $K > 0$, що $\|F'(p)\|, \|(F^{-1})'(q)\| \leqslant K$ для всіх $p \in \mathcal{M}_1, q \in \mathcal{M}_2$; G_1 — область в $\mathcal{M}_1$ з гладкою межею $S_1 = \partial G_1$, $G_2 \triangleq F(G_1)$, $S_2 \triangleq \partial G_2 = F(S_1)$; μ_1 — скінченна борелівська міра на $\mathcal{M}_1$.

4.1 Строго трансверсальні векторні поля

Означення 4.1. Векторне поле $\mathbf{Z} \in C^1_{b;v}(\mathcal{M})$ будемо називати *строго трансверсальним* до S, якщо існує $\delta > 0$ таке, що для кожної точки $p \in S$ виконується $d(\mathbf{Z}(p), T_pS) \geqslant \delta$ (тут $d(\mathbf{Z}(p), T_pS) = \inf\left\{\|\mathbf{Z}(p) - \xi\| \,\middle|\, \xi \in T_pS\right\}$).

Доведемо наступну лему.

Лема 4.1. *Нехай $\mathbf{n}_1 \in C^1_{b;v}(\mathcal{M}_1)$ — строго трансверсальне до S_1 векторне поле. Тоді векторне поле $\mathbf{n}_2(\cdot) = F'(F^{-1}(\cdot))\mathbf{n}_1(F^{-1}(\cdot))$ строго трансверсальне до S_2.*

Доведення. Фіксуємо точку $q \in S_2$ і позначимо $p = F^{-1}(q) \in S_1$. Також позначимо як K_2 множину всіх C^1 кривих $v_2 : (-a_{v_2}, a_{v_2}) \longrightarrow S_2$ ($a_{v_2} > 0$) таких, що $v_2(0) = q$. Аналогічно позначимо як K_1 множину всіх C^1 кривих $v_1 : (-a_{v_1}, a_{v_1}) \longrightarrow S_1$ ($a_{v_1} > 0$) таких, що $v_1(0) = p$. Відмітимо, що $K_2 = \left\{F \circ v_1 \,\middle|\, v_1 \in K_1\right\}$. Тоді

$$d(\mathbf{n}_2(q), T_qS_2) = \inf\left\{\|\mathbf{n}_2(q) - v_2'(t)\big|_{t=0}\| \,\middle|\, v_2 \in K_2\right\} =$$

$$= \inf\left\{\|F'(p)\mathbf{n}_1(p) - F'(p)v_1'(t)\big|_{t=0}\| \,\middle|\, v_1 \in K_1\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \|(F'(p))^{-1}\|^{-1} \inf \left\{ \|\mathbf{n}_1(p) - v_1'(t)\big|_{t=0}\| \;\Big|\; v_1 \in K_1 \right\} =$$
$$= \|(F^{-1})'(p)\|^{-1} d(\mathbf{n}_1(p), T_p S_1),$$

звідки, враховуючи обмеженість дифеоморфізма F і умову леми, отримуємо існування таких $K, \delta > 0$, що не залежать від q, що

$$d(\mathbf{n}_2(q), T_q S_2) \geqslant \frac{\delta}{K},$$

що і доводить строгу трансверсальність $\mathbf{n}_2$ до S_2. □

4.2 Існування замикання градієнта

Лема 4.2. *Нехай* $\mathbf{grad}_{G_1}$ *коректно заданий (міра* μ_1 *має повний носій) і допускає замикання в* $L^2(G_1; \mu_1)$*; для* $A \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_2)$ $\mu_2(A) \triangleq \mu_1(F^{-1}(A))$*. Також*

$$\overline{\mathbf{grad}}_{G_1} f = 0 \ (\mathrm{mod}\, \mu_1) \Leftrightarrow f = \mathrm{const} \ (\mathrm{mod}\, \mu_1).$$

Тоді оператор $\mathbf{grad}_{G_2}$ *також коректно заданий і допускає замикання в* $L^2(G_2; \mu_2)$ *і*

$$\overline{\mathbf{grad}}_{G_2} f = 0 \ (\mathrm{mod}\, \mu_2) \Leftrightarrow f = \mathrm{const} \ (\mathrm{mod}\, \mu_2).$$

Наступне твердження випливає безпосередньо із побудови міри μ_2.

Твердження 4.1. *Нехай* $f \in L^1(\mathcal{M}_2)$*. Тоді* $f \circ F \in L^2(\mathcal{M}_1)$ *і*

$$\int\limits_{\mathcal{M}_2} f \, d\mu_2 = \int\limits_{\mathcal{M}_1} f \circ F \, d\mu_1.$$

Доведення леми 4.2. Коректність завдання $\mathbf{grad}_{G_2}$ очевидна: повнота носія міри μ_2 випливає із повноти носія міри μ_1 і означення μ_2. Спочатку доведемо існування замикання $\mathbf{grad}_{G_2}$. Нехай $C^1(G_2) \ni f_n \longrightarrow 0$ у $L^2(G_2; \mu_2)$, $\mathbf{grad}_{G_2} f_n \longrightarrow \mathbf{Z}$ в $L^2_v(G_2; \mu_2)$. Необхідно показати, що $\mathbf{Z} = 0 \ (\mathrm{mod}\, \mu_2)$. Завдяки твердженню 4.1 маємо

$$\int\limits_{G_2} f_n^2 \, d\mu_2 = \int\limits_{G_1} (f_n \circ F)^2 \, d\mu_1,$$

а значить, $C^1(G_1) \ni f_n \circ F \longrightarrow 0$ в $L^2(G_1;\mu_1)$.

Знайдемо $\mathbf{grad}_{G_1}(f_n \circ F)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{grad}_{G_1}(f_n \circ F) = ((f_n \circ F)')^* = (f_n'(F(\cdot))F'(\cdot))^* =\\ = (F')^*((\mathbf{grad}_{G_2} f_n) \circ F).\end{aligned} \tag{4.1}$$

Тепер покажемо, що $\mathbf{grad}_{G_1}(f_n \circ F) \to (F')^*(\mathbf{Z} \circ F)$ в $L_v^2(G_1;\mu_1)$. Дійсно, враховуючи обмеженість дифеоморфізма F і збіжність послідовності $\mathbf{grad}_{G_2} f_n$ до $\mathbf{Z}$ в $L_v^2(G_2;\mu_2)$, маємо:

$$\int\limits_{G_1} \|(F')^*(\mathbf{Z} \circ F) - (F')^*((\mathbf{grad}_{G_2} f_n) \circ F)\|^2 \, d\mu_1 \leqslant$$

$$\leqslant K^2 \int\limits_{G_1} \|\mathbf{Z} \circ F - (\mathbf{grad}_{G_2} f_n) \circ F\|^2 \, d\mu_1 = K^2 \int\limits_{G_2} \|\mathbf{Z} - \mathbf{grad}_{G_2} f_n\|^2 \, d\mu_2 \to 0,$$

звідки, завдяки існування замикання $\mathbf{grad}_{G_1}$, отримуємо

$$(F')^*(\mathbf{Z} \circ F) = 0 \pmod{\mu_1} \Leftrightarrow \mathbf{Z} \circ F = 0 \pmod{\mu_1} \Leftrightarrow \mathbf{Z} = 0 \pmod{\mu_2},$$

що і доводить існування замикання $\mathbf{grad}_{G_2}$.

Тепер доведемо, що

$$\overline{\mathbf{grad}}_{G_2} f = 0 \pmod{\mu_2} \Leftrightarrow f = \mathrm{const} \pmod{\mu_2}.$$

Для цього спочатку покажемо, що $f \circ F \in \mathcal{D}(\overline{\mathbf{grad}}_{G_1})$ і

$$\overline{\mathbf{grad}}_{G_1}(f \circ F) = (F')^*((\overline{\mathbf{grad}}_{G_2} f) \circ F). \tag{4.2}$$

Оскільки $f \in \mathcal{D}(\overline{\mathbf{grad}}_{G_2})$, то існує послідовність $f_n \in C^1(G_2)$ така, що $f_n \to f$ в $L^2(G_2;\mu_2)$ і $\mathbf{grad}_{G_2} f_n \to \overline{\mathbf{grad}}_{G_2} f$ в $L_v^2(G_2;\mu_2)$. Із $f_2 \to f$ отримуємо $f_n \circ F \to f \circ F$ в $L^2(G_1;\mu_1)$ і

$$\int\limits_{G_1} \|(F')^*((\overline{\mathbf{grad}}_{G_2} f) \circ F) - \mathbf{grad}_{G_1}(f_n \circ F)\|^2 \, d\mu_1 =$$

$$= \int\limits_{G_1} \|(F')^*((\overline{\mathbf{grad}}_{G_2} f) \circ F) - (F')^*((\mathbf{grad}_{G_2} f_n) \circ F)\|^2 \, d\mu_1 \leqslant$$

$$\leqslant K^2 \int\limits_{G_1} \|((\overline{\mathbf{grad}}_{G_2} f) \circ F) - ((\mathbf{grad}_{G_2} f_n) \circ F)\|^2 \, d\mu_1 =$$

$$= K^2 \int\limits_{G_2} \| \overline{\mathbf{grad}}_{G_2} f - \mathbf{grad}_{G_2} f_n\|^2 \, d\mu_2 \to 0,$$

що доводить (4.2).

Тепер, маючи (4.2), отримуємо

$$\overline{\mathbf{grad}}_{G_2} f = 0 \pmod{\mu_2} \Leftrightarrow (F')^*((\overline{\mathbf{grad}}_{G_2} f) \circ F) = 0 \pmod{\mu_1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{\mathbf{grad}}_{G_1}(f \circ F) = 0 \pmod{\mu_1} \Leftrightarrow f \circ F = \mathrm{const} \pmod{\mu_1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f = \mathrm{const} \pmod{\mu_2}.$$

$\square$

4.3 Логарифмічна похідна. Граничний оператор сліду

Нехай на $\mathcal{M}_1$ фіксоване строго трансверсальне до S_1 поле $\mathbf{n}_1 \in C^1_{b;v}(\mathcal{M}_1)$ таке, що $\operatorname{div}_{\mu_1} \mathbf{n}_1$ — логарифмічна похідна μ_1 вздовж поля $\mathbf{n}_1$ — задовольняє наступні умови

$$\operatorname{div}_{\mu_1} \mathbf{n}_1 \Big|_{G_1} \in L^\infty(G_1). \tag{4.3}$$

Ця умова, разом з існуванням замикання $\mathbf{grad}_{G_1}$, дозволяє коректно визначити граничний оператор сліду

$$\gamma_1 : \mathcal{D}(\overline{\mathbf{grad}}_{G_1}) \longrightarrow L^2(S_1) = L^2(S_1; \tau_1),$$

який для неперервно диференційовних функцій $u \in C^1(G_1)$ співпадає з оператором обмеження $u \mapsto u\big|_{S_1}$. Побудову граничного оператора сліду і поверхневої міри дивитися в підрозділі 3.2.

Нагадаємо, що (див. підрозділ 3.2) функція $\rho \in L^1(\mathcal{M}_1;\mu_1)$ співпадає з $\operatorname{div}_{\mu_1}\mathbf{n}_1$ тоді і тільки тоді коли для всіх функцій $u_1 \in C_b^1(\mathcal{M}_1)$ виконується

$$-\int\limits_{\mathcal{M}_1}(\mathbf{grad}_{\mathcal{M}_1} u_1, \mathbf{n}_1)\,d\mu_1 = \int\limits_{\mathcal{M}_1} u_1\rho\,d\mu_1. \tag{4.4}$$

Нехай $\mu_2(A) = \mu_1(F^{-1}(A))$ і $\mathbf{n}_2(\cdot) = F'(F^{-1}(\cdot))\mathbf{n}_1(F^{-1}(\cdot))$. Леми 4.1 і 4.2 дозволяють стверджувати, що $\mathbf{n}_2$ буде строго трансверсальним до S_2, а оператор $\mathbf{grad}_{G_2}$ допускає замикання. Виконання умови $\operatorname{div}_{\mu_2}\mathbf{n}_2\Big|_{G_2} \in$ $\in L^\infty(G_2)$ дозволило б нам стверджувати наявність коректності побудови оператора сліду на $\mathcal{D}(\overline{\mathbf{grad}}_{G_2})$. Як буде видно з наступної леми, ця умова дійсно виконується.

Лема 4.3. *Для векторного поля* $\mathbf{n}_2(\cdot) = F'(F^{-1}(\cdot))\mathbf{n}_1(F^{-1}(\cdot))$ *і міри* $\mu_2(A) = \mu_1(F^{-1}(A))$ *виконується*

$$\operatorname{div}_{\mu_2}\mathbf{n}_2 = (\operatorname{div}_{\mu_1}\mathbf{n}_1)\circ F^{-1}.$$

Доведення. Для доведення леми достатньо показати, що для всіх функцій $u \in C_b^1(\mathcal{M}_2)$ виконується

$$-\int\limits_{\mathcal{M}_2}(\mathbf{grad}_{\mathcal{M}_2} u, \mathbf{n}_2)\,d\mu_2 = \int\limits_{\mathcal{M}_2} u((\operatorname{div}_{\mu_1}\mathbf{n}_1)\circ F^{-1})\,d\mu_2.$$

Дійсно, враховуючи твердження 4.1, означення $\mathbf{n}_2$ і тотожності (4.1) (точніше, його аналог для градієнтів на $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$), (4.4),

$$-\int\limits_{\mathcal{M}_2}(\mathbf{grad}_{\mathcal{M}_2} u, \mathbf{n}_2)\,d\mu_2 = -\int\limits_{\mathcal{M}_1}(\mathbf{grad}_{\mathcal{M}_2} u, \mathbf{n}_2)\circ F\,d\mu_1 =$$

$$= -\int\limits_{\mathcal{M}_1}\big((F')^*((\mathbf{grad}_{\mathcal{M}_2} u)\circ F), \mathbf{n}_1\big)\,d\mu_1 =$$

$$= -\int\limits_{\mathcal{M}_1}(\mathbf{grad}_{\mathcal{M}_1}(u\circ F), \mathbf{n}_1)\,d\mu_1 =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{M}_1} (u \circ F)\,\mathrm{div}_{\mu_1} \mathbf{n}_1 \, d\mu_1 = \int\limits_{\mathcal{M}_2} u((\mathrm{div}_{\mu_1} \mathbf{n}_1) \circ F^{-1}) \, d\mu_2.$$

□

Наслідок 4.1. *Якщо* $\mathrm{div}_{\mu_1} \mathbf{n}_1\Big|_{G_1} \in L^\infty(G_1)$, *то* $\mathrm{div}_{\mu_2} \mathbf{n}_2\Big|_{G_2} \in L^\infty(G_2)$.

Таким чином, на $\mathcal{D}(\overline{\mathbf{grad}}_{G_2})$ коректно визначено граничний оператор сліду γ_2. Наступне твердження відображає зв'язок операторів γ_1 і γ_2.

Твердження 4.2. *Нехай* $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbf{grad}}_{G_1})$. *Тоді* $u \circ F^{-1} \in \mathcal{D}(\overline{\mathbf{grad}}_{G_2})$ *і*

$$\gamma_2(u \circ F^{-1}) = \gamma_1(u) \circ F^{-1}.$$

Доведення. Доведення входження $u \circ F^{-1} \in \mathcal{D}(\overline{\mathbf{grad}}_{G_2})$ аналогічно проведеному в (4.2).

Оскільки $\gamma_1(u) = u\Big|_{S_1}$ і $\gamma_2(u \circ F^{-1}) = (u \circ F^{-1})\Big|_{S_2}$ для $u \in C^1(G_1)$, то справедливість твердження в цьому випадку очевидна. З іншого боку, $C^1(G_1)$ щільно в $\mathcal{D}(\overline{\mathbf{grad}}_{G_1})$, що дає нам справедливість твердження в загальному випадку. □

4.4 Дивергенція за мірою

Існування замикання $\mathbf{grad}_{G_1}$, а також умова (4.3), дозволяють коректно визначити граничні оператори сліду $\gamma_1 : \mathcal{D}(\overline{\mathbf{grad}}_{G_1}) \longrightarrow L^2(S_1)$ і $\gamma_2 : \mathcal{D}(\overline{\mathbf{grad}}_{G_2}) \longrightarrow L^2(S_2)$. Як і в підрозділі 3.2, оператори дивергенції за мірою коректно визначаємо наступним чином:

$$\mathrm{div}_{G_1} \triangleq -\left(\overline{\mathbf{grad}}_{G_1}\Bigg|_{\mathrm{Ker}\,\gamma_1}\right)^*; \quad \mathrm{div}_{G_2} \triangleq -\left(\overline{\mathbf{grad}}_{G_2}\Bigg|_{\mathrm{Ker}\,\gamma_2}\right)^*$$

Наступна лема встановлює зв'язок між операторами div_{G_1} і div_{G_2}.

Лема 4.4. *Нехай* $\mathbf{Z}_1 \in \mathcal{D}(\mathrm{div}_{G_1})$, $\mathbf{Z}_2(\cdot) = F'(F^{-1}(\cdot))\mathbf{Z}_1(F^{-1}(\cdot))$. *Тоді* $\mathbf{Z}_2 \in \mathcal{D}(\mathrm{div}_{G_2})$ *і*

$$\mathrm{div}_{G_2} \mathbf{Z}_2 = (\mathrm{div}_{G_1} \mathbf{Z}_1) \circ F^{-1}.$$

Доведення. Для доведення леми достатньо показати, що для всіх функцій $u \in \operatorname{Ker}\gamma_2$ виконується

$$\int\limits_{G_2} (\overline{\mathbf{grad}}_{G_2} u, \mathbf{Z}_2)\, d\mu_2 = -\int\limits_{G_2} u((\operatorname{div}_{G_1} \mathbf{Z}_1) \circ F^{-1})\, d\mu_2.$$

Переконаємося в тому, що це дійсно так. Враховуючи твердження 4.1, означення $\mathbf{Z}_2$, тотожність (4.2), входження $u \circ G \in \operatorname{Ker}\gamma_1$ (наслідок твердження 4.2) і означення div_{G_1}, маємо

$$\int\limits_{G_2} (\overline{\mathbf{grad}}_{G_2} u, \mathbf{Z}_2)\, d\mu_2 = \int\limits_{G_1} \big((F')^*((\overline{\mathbf{grad}}_{G_2} u) \circ F), \mathbf{Z}_1\big)\ d\mu_1 =$$

$$= \int\limits_{G_1} (\overline{\mathbf{grad}}_{G_2} (u \circ F), \mathbf{Z}_1)\, d\mu_1 =$$

$$= -\int\limits_{G_1} (u \circ F)(\operatorname{div}_{G_1} \mathbf{Z}_1)\, d\mu_1 = -\int\limits_{G_2} u((\operatorname{div}_{G_1} \mathbf{Z}_1) \circ F^{-1})\, d\mu_2.$$

$\square$

4.5 F-асоційована крайова задача

Нехай $\overline{\mathbf{grad}}_{G_1}$ допускає замикання і виконана умова (4.3), а значить, коректно визначені оператори $\overline{\mathbf{grad}}_{G_1}$, γ_1 і div_{G_1}. Завдяки лемам 4.1-4.2 і наслідку 4.1, ми можемо стверджувати, що оператори $\overline{\mathbf{grad}}_{G_2}$, γ_2 і div_{G_2} також коректно визначені.

Розглянемо задачу Діріхле на $\mathcal{M}_1$. Нехай $f \in L^2(G_1); k \in C^1(G_1)$; $a \in C(G_1); k(x) \geqslant \delta > 0; a(x) \geqslant \alpha > 0$. Розглянемо рівняння відносно функції u

$$\operatorname{div}_{G_1}(k \cdot \overline{\mathbf{grad}}_{G_1} u) - a \cdot u = f \tag{4.5}$$

з крайовою умовою

$$\gamma_1(u) = \varphi. \tag{4.6}$$

(тут $\varphi \in \operatorname{Im}\gamma_1$).

Означення 4.2. Будемо називати наступну крайову задачу відносно функції u *F-асоційованою* з задачею Діріхле (4.5)–(4.6): рівняння

$$\operatorname{div}_{G_2}\left((k \circ F^{-1}) \cdot F'(F^{-1}(\cdot)) \left(F'(F^{-1}(\cdot))\right)^* \overline{\mathbf{grad}}_{G_2} u\right) -$$

$$-(a \circ F^{-1}) \cdot u = f \circ F^{-1} \tag{4.7}$$

з крайовою умовою

$$\gamma_2(u) = \varphi \circ F^{-1}. \tag{4.8}$$

Теорема 4.1. *Функція u_2 буде розв'язком F-асоційованої крайової задачі* (4.7)–(4.8) *тоді і тільки тоді коли $u_1 = u_2 \circ F$ буде розв'язком задачі Діріхле* (4.5)–(4.6).

Доведення. Спочатку розглянемо крайові умови. Враховуючи твердження 4.2, маємо

$$\gamma_2(u_2) = \varphi \circ F^{-1} \Leftrightarrow \gamma_2(u_1 \circ F^{-1}) = \varphi \circ F^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \gamma_1(u_1) \circ F^{-1} = \varphi \circ F^{-1} \Leftrightarrow \gamma_1(u_1) = \varphi.$$

Тепер покажемо, що рівняння (4.7) при $u = u_2$ еквівалентне рівнянню (4.5) при $u = u_1$. Дійсно, враховуючи тотожність (4.2) і лему 4.4, маємо

$$\operatorname{div}_{G_2}\left((k \circ F^{-1}) \cdot F'(F^{-1}(\cdot)) \left(F'(F^{-1}(\cdot))\right)^* \overline{\mathbf{grad}}_{G_2} u_2\right) -$$

$$-(a \circ F^{-1}) \cdot u_2 = f \circ F^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{div}_{G_2}\left((k \circ F^{-1}) \cdot F'(F^{-1}(\cdot)) \left(F'(F^{-1}(\cdot))\right)^* \overline{\mathbf{grad}}_{G_2}(u_1 \circ F^{-1})\right) -$$

$$-(a \circ F^{-1}) \cdot (u_1 \circ F^{-1}) = f \circ F^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{div}_{G_2}\left(F'(F^{-1}(\cdot))(k \cdot \overline{\mathbf{grad}}_{G_1} u_1)(F^{-1}(\cdot))\right) - (a \cdot u_1) \circ F^{-1} = f \circ F^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\operatorname{div}_{G_1}(k \cdot \overline{\mathbf{grad}}_{G_1} u_1)\right) \circ F^{-1} - (a \cdot u_1) \circ F^{-1} = f \circ F^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{div}_{G_1}(k \cdot \overline{\mathbf{grad}}_{G_1} u_1) - a \cdot u_1 = f.$$

□

4.6 Приклад 1. Коректність певного класу крайових задач на гільбертовому просторі на основі методу дифеоморфізму

В цьому прикладі покладемо $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 = H$ — гільбертів простір; $G_2 \subset \subset \{y \in H : K_1 \leqslant \|y\| \leqslant K_2\}$ ($K_1, K_2 > 0$ — деякі константи) — обмежена та відділена від нуля область в H з гладкою межею $S_2 = \partial G_2$; $h \in \in L^2(G_2)$; $k \in C^1(G_2)$; $a \in C(G_2)$; $k(y) \geqslant \delta > 0$; $a(y) \geqslant \alpha > 0$; $\varphi \in \operatorname{Im}\gamma_2$. Розглянемо наступний клас крайових задач відносно $u = u(y)$:

$$\operatorname{div}_{G_2}\left(k(y)\left(\|y\|^2\,\overline{\mathbf{grad}}_{G_2}\,u(y) + \beta(\overline{\mathbf{grad}}_{G_2}\,u(y), y)y\right)\right) - \\ -a(y)u(y) = h(y), \qquad (4.9)$$

де $\beta > -1$, з крайовою умовою

$$\gamma_2(u) = \varphi. \qquad (4.10)$$

Покажемо, що за допомогою теореми 4.1 задача (4.9)–(4.10) зводиться до розгляду варіанта задачі Діріхле в гільбертовому просторі, коректність якої була досліджена в [10].

4.6.1 Побудова дифеоморфізму

Нехай $\alpha = \sqrt{1+\beta} - 1 > -1$. Розглянемо наступне відображення при $x \neq 0$:

$$F : x \mapsto \|x\|^\alpha x.$$

Знайдемо F^{-1}.

$$F(x) = y \Leftrightarrow \|x\|^\alpha x = y,$$

тому виконується

$$x = \|x\|^{-\alpha} y,$$

з іншого боку, нескладно виразити $\|x\|$ через y:

$$\|x\|^{1+\alpha} = \|y\| \Rightarrow \|x\| = \|y\|^{\frac{1}{1+\alpha}},$$

отже,

$$F^{-1} : y \mapsto \|y\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} y.$$

Відмітимо, що тут нерівність $\alpha \neq -1$, яка випливає з нерівності $\beta \neq \neq -1$, критична, інакше F не матиме оберненого відображення.

Позначимо $G_1 \triangleq F^{-1}(G_2)$. Тоді $G_1 \subset \{x \in H : K_1 \leqslant \|F(x)\| \leqslant \leqslant K_2\} = \{x \in H : K_1^{\frac{1}{1+\alpha}} \leqslant \|x\| \leqslant K_2^{\frac{1}{1+\alpha}}\}$. Для зручності позначимо $T_1 \triangleq K_1^{\frac{1}{1+\alpha}}, T_2 \triangleq K_2^{\frac{1}{1+\alpha}}$, тоді область G_1 є підмножиною кільця $\{x \in H : 0 < T_1 \leqslant \|x\| \leqslant T_2 > 0\}$. Оскільки F^{-1} на G_2 є гладким відображенням, то межа $S_1 \triangleq \partial G_2 = F^{-1}(S_2)$ буде гладкою.

Всюди в подальшому розглядаємо F як відображення з G_1 в G_2, а F^{-1}, відповідно, — як відображення з G_2 в G_1.

4.6.2 Похідна дифеоморфізму

Лема 4.5. *Похідна дифеоморфізму F' може бути знайденою за формулою*

$$F'(x)z = \|x\|^{\alpha} z + \alpha \|x\|^{\alpha-2}(x, z)x.$$

Доведення. Необхідно довести, що при $h \to 0$

$$\Big\| F(x+h) - F(x) - \|x\|^{\alpha} h - \alpha \|x\|^{\alpha-2}(x,h)x \Big\| = o(\|h\|).$$

Використовуючи формулу похідної складеної функції разом з тотожністю $(\|x\|^2)' = 2x$, отримаємо:

$$(\|x\|^{\alpha})' = ((\|x\|^2)^{\frac{\alpha}{2}})' = \frac{\alpha}{2}(\|x\|^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} 2x = \alpha \|x\|^{\alpha-2} x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|x+h\|^{\alpha} - \|x\|^{\alpha} - \alpha \|x\|^{\alpha-2}(x,h) = o(\|h\|),$$

відповідно,

$$F(x+h) - F(x) - \|x\|^{\alpha} h - \alpha \|x\|^{\alpha-2}(x,h)x =$$

$$= (\|x+h\|^{\alpha} - \|x\|^{\alpha} - \alpha \|x\|^{\alpha-2}(x,h))x +$$

$$+(\|x+h\|^\alpha - \|x\|^\alpha)h = o(\|h\|)x + o(1)h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\|F(x+h) - F(x) - \|x\|^\alpha h - \alpha\|x\|^{\alpha-2}(x,h)x\right\| = o(\|h\|).$$

$\square$

Наслідок 4.2. *Для $x \in G_1$ виконується*

$$\|F'(x)\| \leqslant \begin{cases} (1+\alpha)T_2^\alpha, & \alpha \geqslant 0 \\ (1-\alpha)T_1^\alpha, & \alpha \in (-1,0) \end{cases}.$$

Доведення. Оскільки для будь-якого $x \in G_1$ виконується $\|x\| \in [T_1, T_2]$, то

$$\frac{\|F'(x)z\|}{\|z\|} \leqslant \frac{\|x\|^\alpha\|z\|}{\|z\|} + |\alpha|\frac{\|x\|^{\alpha-1}|(x,z)|}{\|z\|} \leqslant$$

$$\leqslant (1+|\alpha|)\|x\|^\alpha \leqslant \begin{cases} (1+\alpha)T_2^\alpha, & \alpha \geqslant 0 \\ (1-\alpha)T_1^\alpha, & \alpha \in (-1,0) \end{cases}.$$

$\square$

4.6.3 Похідна оберненої функції до дифеоморфізму

Лема 4.6. *Похідна оберненого дифеоморфізму $(F^{-1})'$ може бути знайденою за формулою*

$$(F^{-1})'(y)z = z\|y\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} - \frac{\alpha}{1+\alpha}\|y\|^{-\frac{3\alpha+2}{1+\alpha}}(y,z)y.$$

Доведення. Необхідно довести, що при $h \to 0$

$$\left\|F^{-1}(y+h) - F^{-1}(y) - h\|y\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} + \frac{\alpha}{1+\alpha}\|y\|^{-\frac{3\alpha+2}{1+\alpha}}(y,h)y\right\| = o(\|h\|).$$

Використовуючи формулу похідної складеної функції разом з тотожністю $(\|y\|^2)' = 2y$, отримаємо:

$$(\|y\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}})' = ((\|y\|^2)^{-\frac{\alpha}{2+2\alpha}})' = -\frac{\alpha}{2+2\alpha}(\|y\|^2)^{-\frac{\alpha}{2+2\alpha}-1}2y =$$

$$= -\frac{\alpha}{1+\alpha}\|y\|^{-\frac{2+3\alpha}{1+\alpha}}y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|y+h\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} - \|y\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} + \frac{\alpha}{1+\alpha}\|y\|^{-\frac{3\alpha+2}{1+\alpha}}(y,h) = o(\|h\|),$$

відповідно,

$$F^{-1}(y+h) - F^{-1}(y) - h\|y\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} + \frac{\alpha}{1+\alpha}\|y\|^{-\frac{3\alpha+2}{1+\alpha}}(y,h)y =$$

$$= \left(\|y+h\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} - \|y\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} + \frac{\alpha}{1+\alpha}\|y\|^{-\frac{3\alpha+2}{1+\alpha}}(y,h)\right)y+$$

$$+\left(\|y+h\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} - \|y\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}\right)h = o(\|h\|)y + o(1)h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\|F^{-1}(y+h) - F^{-1}(y) - h\|y\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} + \frac{\alpha}{1+\alpha}\|y\|^{-\frac{3\alpha+2}{1+\alpha}}(y,h)y\right\| = o(\|h\|).$$

□

Наслідок 4.3. *Для $y \in G_2$ виконується*

$$\|(F^{-1})'(y)\| \leqslant \begin{cases} \frac{1+2\alpha}{1+\alpha}K_1^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}, & \alpha \geqslant 0 \\ \frac{1}{1+\alpha}K_2^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}, & \alpha \in (-1,0) \end{cases}.$$

Доведення. Оскільки для будь-якого $y \in G_2$ виконується $\|y\| \in [K_1, K_2]$, то

$$\frac{\|(F^{-1})'(y)z\|}{\|z\|} \leqslant \frac{\|y\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}\|z\|}{\|z\|} + \frac{|\alpha|}{1+\alpha}\frac{\|y\|^{-\frac{2\alpha+1}{1+\alpha}}|(y,z)|}{\|z\|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1+\alpha+|\alpha|}{1+\alpha}\|y\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} \leqslant \begin{cases} \frac{1+2\alpha}{1+\alpha}K_1^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}, & \alpha \geqslant 0 \\ \frac{1}{1+\alpha}K_2^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}, & \alpha \in (-1,0) \end{cases}.$$

□

З наслідків 4.2 і 4.3 випливає, що F є обмеженим дифеоморфізмом, а отже, може бути використана теорема 4.1.

4.6.4 Зведення вихідної задачі до задачі Діріхле спеціального типу

Відмітимо, що оператор $F'(x)$ є самоспряженим:

$$(F'(x)z_1, z_2) = (\|x\|^\alpha z_1 + \alpha\|x\|^{\alpha-2}(x,z_1)x, z_2) =$$

$$= \|x\|^\alpha(z_1,z_2) + \alpha\|x\|^{\alpha-2}(x,z_1)(x,z_2) =$$

$$= (z_1, \|x\|^{\alpha} z_2 + \alpha \|x\|^{\alpha-2}(x, z_2)x) = (z_1, F'(x)z_2),$$

отже,

$$F'(x)(F')^*(x)z = \|x\|^{\alpha}(\|x\|^{\alpha} z + \alpha\|x\|^{\alpha-2}(x,z)x) +$$
$$+\alpha\|x\|^{\alpha-2}(x, \|x\|^{\alpha} z + \alpha\|x\|^{\alpha-2}(x,z)x)x =$$
$$= \|x\|^{2\alpha} z + \alpha(2+\alpha)\|x\|^{2\alpha-2}(z,x)x =$$
$$= \|x\|^{2\alpha} z + \beta\|x\|^{2\alpha-2}(z,x)x,$$

тому,

$$F'(F^{-1}(y))(F')^*(F^{-1}(y))z = F'(\|y\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} y)(F')^*(\|y\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} y)z =$$
$$= \left\| \|y\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} y \right\|^{2\alpha} z + \beta \left\| \|y\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} y \right\|^{2\alpha-2} (z, \|y\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} y)\|y\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} y =$$
$$= \|y\|^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}} z + \beta\|y\|^{-\frac{2}{1+\alpha}}(z,y)y = \|y\|^{-\frac{2}{1+\alpha}} \left(\|y\|^2 z + \beta(z,y)y \right) =$$
$$= \|F^{-1}(y)\|^{-2} \left(\|y\|^2 z + \beta(z,y)y \right).$$

Таким чином, за рахунок теореми 4.1 і отриманого вище, ми довели наступну теорему.

Теорема 4.2. *Функція $u(y) = u_2(y)$ буде розв'язком крайової задачі (4.9)–(4.10) на області G_2 тоді і тільки тоді коли функція $u(x) = u_1(x) \triangleq u_2(F(x))$ буде розв'язком наступної задачі Діріхле на області $G_1 = F^{-1}(G_2)$:*

$$\operatorname{div}_{G_1} \left((k \circ F) \|\cdot\|^2 \overline{\mathbf{grad}}_{G_1} u \right) - (a \circ F)u = h \circ F, \tag{4.11}$$

$$\gamma_1(u) = \varphi \circ F. \tag{4.12}$$

Зауваження 4.1. *Задача (4.11)–(4.12) дійсно буде задачею Діріхле в термінах роботи [15], оскільки для будь-якого $y \in G_1$ виконується $\|y\|^2 \geqslant T_1^2 > 0$.*

4.7 Приклад 2. Крайова задача, асоційована зі стереографічною проекцією сфери

В попередньому підрозділі наведено приклад розширення класу коректних крайових задач на області в гільбертовому просторі. В цьому підрозділі, на відміну від попереднього, ми використаємо результат теореми 4.1 для ріманового многовиду, який не буде областю в гільбертовому просторі.

4.7.1 Стереографічна проекція сфери в гільбертовому просторі

Нехай H — сепарабельний гільбертів простір, $\{e_1, e_2, \dots e_n, \dots\}$ — його ортонормований базис; $H_1 = \textit{л.о.}\{e_2, \dots e_n, \dots\}$ — підпростір H коровимірності 1: $H = H_1 \oplus \textit{л.о.}\{e_1\} \simeq H_1 \oplus \mathbb{R}$; $\varphi(x) = x - (x, e_1)e_1$ — ортопроектор на H_1; $\mathcal{M} = \{x \in H : \|x - e_1\| = 1, \|\varphi(x)\| < \alpha < 1, (x - e_1, e_1) < 0\}$ — частина нижньої напівсфери сфери S_1 з центром в e_1 радіуса 1 — ріманів многовид з рівномірним атласом, що складається з однієї карти $(\varphi, \mathcal{M})$ ($\varphi : \mathcal{M} \to \varphi(\mathcal{M}) = \{x \in H_1 : \|x\| < \alpha\}$) і основним тензором, індукованим вкладенням $\mathcal{M} \subset H$.

Відмітимо, що для будь-якого $x \in \mathcal{M}$ виконується $1 = \|x - e_1\|^2 = (x - e_1, e_1)^2 + \|\varphi(x)\|^2$, а значить, враховуючи $\|\varphi(x)\| < \alpha < 1$,

$$|(x - e_1, e_1)| > \sqrt{1 - \alpha^2}. \tag{4.13}$$

Нехай F — стереографічна проекція $S_1 \setminus \{2e_1\}$ на H_1: $F(x)$ — перетин прямої, що проходить через точки x і $2e_1$ з H_1. Іншими словами, $F(x) = \lambda x + (1 - \lambda)2e_1$, де $\lambda \in \mathbb{R}$ таке, що

$$\lambda x + (1 - \lambda)2e_1 \in H_1 \Leftrightarrow (\lambda x + (1 - \lambda)2e_1, e_1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{2 - (x, e_1)},$$

тобто,

$$F(x) = 2\frac{x - (x, e_1)e_1}{2 - (x, e_1)}.$$

Аналогічно для $y \in H_1$: $F^{-1}(y) = \lambda y + (1-\lambda)2e_1$, де $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ таке, що:

$$\lambda y + (1-\lambda)2e_1 \in \mathcal{M} \Rightarrow \|\lambda y + (1-\lambda)2e_1 - e_1\| = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2\|y\|^2 + (1-2\lambda)^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{4}{\|y\|^2+4},$$

тобто,

$$F^{-1}(y) = \frac{4y + 2\|y\|^2 e_1}{\|y\|^2+4}.$$

F — дифеоморфізм між $\mathcal{M}$ і $B_1 \triangleq F(\mathcal{M}) \subset H_1$. B_1 є відкритою кулею в H_1 з центром в нулі і радіуса $\beta = \frac{2\alpha}{1+\sqrt{1-\alpha^2}}$.

Тепер знайдемо $\varphi^{-1} : \{x \in H_1 : \|x\| < \alpha\} \to \mathcal{M}$. $\varphi^{-1}(y) = y + \lambda e_1$, де $\lambda \in \mathbb{R}$ таке, що $\|(y+\lambda e_1) - e_1\| = 1$ і $\lambda \leqslant 1$ (нижня напівсфера), тобто,

$$\begin{cases} \|y\|^2 + (\lambda-1)^2 = 1 \\ \lambda \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = 1 - \sqrt{1-\|y\|^2},$$

а значить,

$$\varphi^{-1}(y) = y + (1 - \sqrt{1-\|y\|^2})e_1.$$

4.7.2 Знаходження F' і оцінка $\|F'\|$

$$(F \circ \varphi^{-1})(y) = \frac{2y}{1+\sqrt{1-\|y\|^2}}.$$

Лема 4.7. *Похідна $(F \circ \varphi^{-1})'$ може бути знайденою за формулою*

$$(F \circ \varphi^{-1})'(y)x = \frac{2x}{1+\sqrt{1-\|y\|^2}} + \frac{2(x,y)}{(1+\sqrt{1-\|y\|^2})^2\sqrt{1-\|y\|^2}}y.$$

Доведення. Позначимо

$$f(y) \triangleq \frac{1}{2}(F \circ \varphi^{-1})(y) = \frac{y}{1+\sqrt{1-\|y\|^2}},$$

$$A(y)h \triangleq \frac{h}{1+\sqrt{1-\|y\|^2}} + \frac{(h,y)}{(1+\sqrt{1-\|y\|^2})^2\sqrt{1-\|y\|^2}}y.$$

Необхідно довести, що $\|f(y+h)-f(y)-A(y)h\| = o(\|h\|)$ при $h\to 0$:

$$f(y+h)-f(y)-A(y)h = \left(\frac{1}{1+\sqrt{1-\|y+h\|^2}} - \frac{1}{1+\sqrt{1-\|y\|^2}}\right)h+$$

$$+\frac{1}{(1+\sqrt{1-\|y+h\|^2}(1+\sqrt{1-\|y\|^2})^2\sqrt{1-\|y\|^2})}\cdot$$

$$\cdot\Big((\sqrt{1-\|y\|^2}-\sqrt{1-\|y+h\|^2})(1+\sqrt{1-\|y\|^2})\sqrt{1-\|y\|^2}-$$

$$-(1+\sqrt{1-\|y+h\|^2})(h,y)\Big)\,y,$$

а використовуючи формулу похідної складеної функції разом з тотожністю $(\|y\|^2)' = 2y$, отримаємо:

$$\left(\sqrt{1-\|y\|^2}\right)' = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\|y\|^2}}2y = -\frac{y}{\sqrt{1-\|y\|^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-\|y\|^2}-\sqrt{1-\|y+h\|^2} = \frac{(y,h)}{\sqrt{1-\|y\|^2}} + o(\|h\|),$$

тому

$$f(y+h)-f(y)-A(y)h = o(1)h+$$

$$+\frac{1}{(1+\sqrt{1-\|y+h\|^2}(1+\sqrt{1-\|y\|^2})^2\sqrt{1-\|y\|^2})}\cdot$$

$$\cdot\Big(o(\|h\|)(1+\sqrt{1-\|y\|^2})\sqrt{1-\|y\|^2}+$$

$$+(\sqrt{1-\|y\|^2}-\sqrt{1-\|y+h\|^2})(h,y)\Big)\,y,$$

тому, враховуючи нерівність Коші-Буняковського $|(h,y)| \leqslant \|h\|\cdot\|y\|$,

$$f(y+h)-f(y)-A(y)h = o(1)h + o(\|h\|)y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|f(y+h)-f(y)-A(y)h\| = o(\|h\|).$$

$\square$

Тепер нехай $p \in \mathcal{M}, \xi \in T_p\mathcal{M}$. Тут і далі під вектором із дотичного простору будемо розуміти вектор з центром в нулі. Тоді:

$$F'(p)\xi = (F \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p))\xi_\varphi = (F \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p))P(p)\xi, \tag{4.14}$$

де $P(p) : T_p\mathcal{M} \to H_1$ — оператор проектування із $T_p\mathcal{M} \subset H$ в H_1:

$$P(p) : \xi \mapsto \xi - (\xi, e_1)e_1.$$

Відмітимо, що $\|P(p)\| = 1$, а тому

$$\|F'(p)\| \leqslant \|(F \circ \varphi^{-1})'(y)\| \cdot \|P(p)\| = \|(F \circ \varphi^{-1})'(y)\|,$$

де $y = \varphi(p)$. Далі, оскільки $\|y\| = \|\varphi(p)\| < \alpha$, то

$$\|(F \circ \varphi^{-1})'(y)x\| < 2\left(\frac{\|x\|}{1+\sqrt{1-\alpha^2}} + \frac{\alpha^2\|x\|}{(1+\sqrt{1-\alpha^2})^2\sqrt{1-\alpha^2}}\right) =$$

$$= \frac{2\|x\|}{(1+\sqrt{1-\alpha^2})\sqrt{1-\alpha^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|(F \circ \varphi^{-1})'(y)\| \leqslant \frac{2}{(1+\sqrt{1-\alpha^2})\sqrt{1-\alpha^2}}.$$

Отже, для будь-якого $p \in \mathcal{M}$:

$$\|F'(p)\| \leqslant \frac{2}{(1+\sqrt{1-\alpha^2})\sqrt{1-\alpha^2}}. \tag{4.15}$$

4.7.3 Знаходження $(F^{-1})'$ і оцінка $\|(F^{-1})'\|$

$$(\varphi \circ F^{-1})(q) = \frac{4q}{\|q\|^2+4}.$$

Лема 4.8. *Похідна $(\varphi \circ F^{-1})'$ може бути знайденою за формулою*

$$(\varphi \circ F^{-1})'(q)\psi = \frac{4\psi}{\|q\|^2+4} - \frac{8(\psi, q)}{(\|q\|^2+4)^2}q.$$

Доведення. Позначимо

$$g(q) \triangleq \frac{1}{4}(\varphi \circ F^{-1})(q) = \frac{q}{\|q\|^2+4}, B(q)h \triangleq \frac{h}{\|q\|^2+4} - \frac{2(h, q)}{(\|q\|^2+4)^2}q.$$

Необхідно довести, що $\|g(q+h)-g(1)-B(q)h\| = o(\|h\|)$ при $h \to 0$:

$$g(q+h)-g(q)-B(q)h = \left(\frac{1}{\|q+h\|^2+4} - \frac{1}{\|q\|^2+4}\right)h +$$

$$+\frac{(\|q\|^2-\|q+h\|^2)(\|q\|^2+4)+2(\|q+h\|^2+4)(h,q)}{(\|q+h\|^2+4)(\|q\|^2+4)^2}q,$$

а оскільки $\|q\|^2 - \|q+h\|^2 = -\|h\|^2 - 2(h,q)$, то

$$(\|q\|^2-\|q+h\|^2)(\|q\|^2+4)+2(\|q+h\|^2+4)(h,q) =$$

$$= -\|h\|^2(\|q\|^2+4)+2(h,q)(\|q+h\|^2+4-\|q\|^2-4) =$$

$$= o(\|h\|)+(h,q)o(1),$$

враховуючи нерівність Коші-Буняковського $|(h,q)| \leqslant \|h\|\cdot\|q\|$, маємо

$$g(q+h)-g(q)-B(q)h = o(1)h + o(\|h\|)q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|g(q+h)-g(1)-B(q)h\| = o(\|h\|).$$

$\square$

Оскільки $(\varphi\circ F^{-1})'(q)\psi = ((F^{-1})'(q)\psi)^{\varphi}$, то

$$(F^{-1})'(q) = P^{-1}(F^{-1}(q))(\varphi\circ F^{-1})'(q).$$

Знайдемо P^{-1}:

$$P^{-1}(p)\xi^{\varphi} = \xi^{\varphi} + \lambda e_1,$$

де $\lambda \in \mathbb{R}$ таке, що

$$(\xi^{\varphi}+\lambda e_1, p-e_1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{(\xi^{\varphi}, p-e_1)}{(e_1, p-e_1)},$$

тобто,

$$P^{-1}(p)\xi^{\varphi} = \xi^{\varphi} - \frac{(\xi^{\varphi}, p-e_1)}{(e_1, p-e_1)}e_1,$$

що разом з нерівністю (4.13), для всіх $p \in \mathcal{M}$ дає оцінку

$$\|P^{-1}(p)\| \leqslant \sqrt{1+\frac{1}{1-\alpha^2}} = \sqrt{\frac{2-\alpha^2}{1-\alpha^2}}.$$

З іншого боку, для всіх $q \in B_1$:

$$\|(\varphi \circ F^{-1})'(q)\| \leqslant \frac{2+\beta^2}{2},$$

а значить, для всіх $q \in B_1$:

$$\|(F^{-1})'(q)\| \leqslant \sqrt{\frac{2-\alpha^2}{1-\alpha^2}} \cdot \frac{2+\beta^2}{2},$$

що разом з нерівністю (4.15) доводить обмеженість дифеоморфізму F.

4.7.4 Знаходження $(F')^*$

Відповідно до (4.14), $F'(p)$ є композицією лінійних операторів $(F \circ \circ\varphi^{-1})'(\varphi(p))$ і $P(p)$. Спочатку покажемо, що $(F \circ \varphi^{-1})'(y)$ є самоспряженим:

$$((F \circ \varphi^{-1})'(y)x_1, x_2) =$$
$$= \left(\frac{2x_1}{1+\sqrt{1-\|y\|^2}} + \frac{2(x_1, y)}{(1+\sqrt{1-\|y\|^2})^2\sqrt{1-\|y\|^2}}y, x_2\right) =$$
$$= \frac{2(x_1, x_2)}{1+\sqrt{1-\|y\|^2}} + \frac{2(x_1, y)(x_2, y)}{(1+\sqrt{1-\|y\|^2})^2\sqrt{1-\|y\|^2}} =$$
$$= \left(x_1, \frac{2x_2}{1+\sqrt{1-\|y\|^2}} + \frac{2(x_2, y)}{(1+\sqrt{1-\|y\|^2})^2\sqrt{1-\|y\|^2}}y\right) =$$
$$= (x_1, (F \circ \varphi^{-1})'(y)x_2).$$

Таким чином, знаходження $(F'(p))^*$ зводиться до знаходження спряженого оператора $P^*(p) : H_1 \to T_p\mathcal{M}$:

$$(F'(p))^* = P^*(p)(F \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p)).$$

Твердження 4.3. *Спряжений оператор $P^*(p)$ може бути знайдено за формулою*

$$P^*(p)\psi = \psi - (p - e_1, \psi)(p - e_1).$$

Тобто, $P^*(p)$ — оператор проектування з $H_1 \subset H$ в $T_p\mathcal{M}$.

Доведення. Будемо доводити виходячи з означення спряженого оператора. Оскільки

$$\psi \in H_1 \Leftrightarrow (e_1, \psi) = 0$$

і

$$\xi \in T_p\mathcal{M} \Leftrightarrow (p - e_1, \xi) = 0,$$

то:

$$(P(p)\xi, \psi) - (\xi, \psi - (p - e_1, \psi)(p - e_1)) =$$

$$= (\xi, \psi) - (\xi, e_1)(e_1, \psi) - (\xi, \psi) + (p - e_1, \psi)(p - e_1, \xi) = 0.$$

□

4.7.5 Асоційована крайова задача

Відповідно до отриманих вище результатів, для $q \in G_2 \subset H_1$ ми маємо:

$$F'(F^{-1}(q))(F'(F^{-1}(q)))^* \, \overline{\mathbf{grad}}_{G_2} u(q) =$$

$$= (F \circ \varphi^{-1})' \left(\frac{4q}{\|q\|^2 + 4} \right) P \left(\frac{4q + 2\|q\|^2 e_1}{\|q\|^2 + 4} \right) \cdot$$

$$\cdot P^* \left(\frac{4q + 2\|q\|^2 e_1}{\|q\|^2 + 4} \right) (F \circ \varphi^{-1})' \left(\frac{4q}{\|q\|^2 + 4} \right) \overline{\mathbf{grad}}_{G_2} u(q).$$

Підставляти будемо покроково.

Крок 1. Знайдемо $P\left(\frac{4q+2\|q\|^2 e_1}{\|q\|^2+4}\right) P^*\left(\frac{4q+2\|q\|^2 e_1}{\|q\|^2+4}\right)\psi$. Для цього спочатку підставимо $P(p)P^*(p)\psi$ (тут використаємо те, що $\psi \in H_1$, а значить $(\psi, e_1) = 0$):

$$P(p)P^*(p)\psi = P(p)(\psi - (p - e_1, \psi)(p - e_1)) =$$

$$= \psi - (p - e_1, \psi)(p - e_1) - (e_1, \psi - (p - e_1, \psi)(p - e_1))e_1 =$$

$$= \psi - (p, \psi)(p - e_1) + (e_1, (p, \psi)(p - e_1))e_1 =$$

$$= \psi - (p, \psi)p + (p, \psi)e_1 + (p, \psi)(p, e_1)e_1 - (p, \psi)e_1 =$$

$$= \psi - (p, \psi)(p - (p, e_1)e_1) = \psi - (p - (p, e_1)e_1, \psi)(p - (p, e_1)e_1) =$$

$$= \psi - (\operatorname{pr}_{H_1} p, \psi) \operatorname{pr}_{H_1} p.$$

Далі відмітимо, що

$$\operatorname{pr}_{H_1}\left(\frac{4q + 2\|q\|^2 e_1}{\|q\|^2 + 4}\right) = \frac{4q}{\|q\|^2 + 4},$$

а значить

$$P\left(\frac{4q + 2\|q\|^2 e_1}{\|q\|^2 + 4}\right) P^*\left(\frac{4q + 2\|q\|^2 e_1}{\|q\|^2 + 4}\right)\psi = \psi - \frac{16}{(\|q\|^2 + 4)^2}(q, \psi)q.$$

Крок 2. Підставимо $(F \circ \varphi^{-1})'\left(\frac{4q}{\|q\|^2+4}\right)x$. Для цього використаємо результат леми 4.7, спочатку спростивши $\sqrt{1 - \|y\|^2}$ для $y = \frac{4q}{\|q\|^2+4}$:

$$\sqrt{1 - \left\|\frac{4q}{\|q\|^2 + 4}\right\|^2} = \sqrt{\frac{\|q\|^4 - 8\|q\|^2 + 16}{\|q\|^4 + 8\|q\|^2 + 16}} =$$

$$= \frac{4 - \|q\|^2}{4 + \|q\|^2} \; (\|q\| < \beta < 2\alpha < 2),$$

тобто,

$$(F \circ \varphi^{-1})'\left(\frac{4q}{\|q\|^2 + 4}\right)x = \frac{2x}{1 + \frac{4-\|q\|^2}{4+\|q\|^2}} + \frac{2(x,q)}{\left(1 + \frac{4-\|q\|^2}{4+\|q\|^2}\right)^2 \frac{4-\|q\|^2}{4+\|q\|^2}} \cdot \frac{16q}{\|q\|^2 + 4} =$$

$$= \frac{4 + \|q\|^2}{4}x + \frac{(x,q)(4 + \|q\|^2)}{32(4 - \|q\|^2)}q = \frac{4 + \|q\|^2}{4}\left(x + \frac{(x,q)}{8(4 - \|q\|^2)}q\right).$$

Крок 3. Поєднаємо результати двох перших кроків:

$$P\left(\frac{4q + 2\|q\|^2 e_1}{\|q\|^2 + 4}\right) P^*\left(\frac{4q + 2\|q\|^2 e_1}{\|q\|^2 + 4}\right)(F \circ \varphi^{-1})'\left(\frac{4q}{\|q\|^2 + 4}\right)x =$$

$$= \frac{4 + \|q\|^2}{4}\left(x + \frac{(x,q)}{8(4 - \|q\|^2)}q\right) -$$

$$- \frac{16}{(4 + \|q\|^2)^2} \cdot \frac{4 + \|q\|^2}{4}(q, x + \frac{(x,q)}{8(4 - \|q\|^2)}q)q =$$

$$= \frac{4 + \|q\|^2}{4}\left(x + \frac{(x,q)}{8(4 - \|q\|^2)}q\right) - \frac{32 - 7\|q\|^2}{2(4 + \|q\|^2)(4 - \|q\|^2)}(x,q)q =$$

$$= \frac{4+\|q\|^2}{4}x + \frac{\|q\|^4+36\|q\|^2-112}{8(4+\|q\|^2)(4-\|q\|^2)}(x,q)q.$$

Крок 4. Нарешті

$$(F\circ\varphi^{-1})'\left(\frac{4q}{\|q\|^2+4}\right)P\left(\frac{4q+2\|q\|^2e_1}{\|q\|^2+4}\right)\cdot$$

$$\cdot P^*\left(\frac{4q+2\|q\|^2e_1}{\|q\|^2+4}\right)(F\circ\varphi^{-1})'\left(\frac{4q}{\|q\|^2+4}\right)x =$$

$$= \frac{4+\|q\|^2}{4}\left(\frac{4+\|q\|^2}{4}x + \frac{\|q\|^4+36\|q\|^2-112}{8(4+\|q\|^2)(4-\|q\|^2)}(x,q)q+\right.$$

$$\left.\frac{q}{8(4-\|q\|^2)}\left(\frac{4+\|q\|^2}{4}(x,q)+\|q\|^2\frac{\|q\|^4+36\|q\|^2-112}{8(4+\|q\|^2)(4-\|q\|^2)}(x,q)\right)\right) =$$

$$= \frac{(4+\|q\|^2)^2}{16}x - 3\frac{1152-656\|q\|^2+76\|q\|^4+3\|q\|^6}{256(4-\|q\|^2)^2}(x,q)q.$$

Нехай $G_1 \subset \mathcal{M}$ — область з гладкою межею, $G_2 \triangleq F(G_1) \subset B_1$. Враховуючи теорему 4.1, доведено наступну теорему.

Теорема 4.3. *Функція $u(q)=u_1(q)$ буде розв'язком наступної крайової задачі на області $G_2 \subset B_1$ в гільбертовому просторі H_1*

$$\operatorname{div}_{G_2}\left(\frac{(4+\|q\|^2)^2}{16}\overline{\mathbf{grad}}_{G_2}u(q)-\right.$$

$$\left.-3\frac{1152-656\|q\|^2+76\|q\|^4+3\|q\|^6}{256(4-\|q\|^2)^2}(\overline{\mathbf{grad}}_{G_2}u(q),q)q\right)-$$

$$-a(q)u(q)=f(q),$$

$$\gamma_2(u)=\varphi,$$

де $f\in L^2(G_2); a\in C(G_2); a(q)\geqslant\alpha>0; \varphi\in\operatorname{Im}\gamma_2$,
в тому і тільки тому випадку, коли функція $u(p)=u_2(p)\triangleq u_1(F(p))$ буде розв'язком наступної задачі Діріхле на області $G_1=F^{-1}(G_2)$ на рімановому многовиді $\mathcal{M}$:

$$\Delta_{G_1}u-(a\circ F)u=f\circ F,$$

$$\gamma_1(u)=\varphi\circ F.$$

4.8 Висновки до розділу 4

В цьому розділі досліджується дифеоморфне відображення між нескінченновимірними рімановими многовидами з рівномірними атласами як спосіб розширення класу коректних крайових задач. Під коректністю задачі розуміється існування та єдиність розв'язку.

Наведено два приклади використання методу дифеоморфізмів. В першому прикладі доведена коректність певного класу крайових задач на області гільбертового простору. В другому — отримана крайова задача, асоційована зі стереографічною проекцією сфери, таким чином, проілюстрована робота методу дифеоморфізмів на ріманових многовидах, які не є областями в гільбертовому просторі.

ВИСНОВКИ

В роботі розглянуто нескінченновимірні рiманові многовиди. Запропонована умова рiвномiрностi атласу рiманового многовиду, виконання якої дозволяє довести метричну повноту многовиду за внутрiшньою метрикою. Доведено, що при виконаннi певних додаткових умов, якi, зокрема, виконуються при умовi рiвномiрностi атласу, внутрiшня метрика є узгодженою з вихiдною топологiєю многовиду.

В якостi нетривiальних прикладiв таких многовидiв показано, що при виконаннi певних умов межа областi та поверхня сумiсного рiвня в гiльбертовому просторi є рiмановими многовидами з рiвномiрними атласами. Для отримання рiвномiрностi атласу наведених прикладiв запропоновано та дослiджено косинус кута мiж пiдпросторами в гiльбертовому просторi. Доведено ряд результатiв, що дозволяють оцiнити косинус кута мiж пiдпросторами однакової скiнченної корозмiрностi, i саме ця оцiнка використовується при побудовi прикладiв.

Запропоновано L^2-версiю лапласiана за мiрою на (нескiнченновимiрному) рiмановому многовидi. Доведено коректнiсть задачу Дiрiхле для рiвнянь з уведеним лапласiаном в областi рiманова многовиду певного класу. Пiд коректнiстю задачi розумiється iснування та єдинiсть розв'язку задачi. При цьому використовується метрична повнота многовиду, яка зокрема виконується при виконаннi умови рiвномiрностi атласу.

Наведено модельний приклад рiвномiрного рiманового многовиду, для якого реалiзуються всi умови, використаннi при доведеннi коректностi наведеної задачi Дiрiхле.

Дослiджується дифеоморфне вiдображення мiж нескiнченновимiрними рiмановими многовидами з рiвномiрними атласами як спосiб розширення класу коректних крайових задач.

Наведено два приклади використання методу дифеоморфiзмiв. В першому прикладі доведена коректність певного класу крайових задач на області гільбертового простору. В другому — отримана крайова задача, асоційована зі стереографічною проекцією сфери, таким чином, проілюстрована робота методу дифеоморфізмів на ріманових многовидах, які не є областями в гільбертовому просторі.

Основні результати дисертації.

1. Наведено нетривіальний приклад метрично повного нескінченновимірного ріманового многовиду.

2. Одержано технічні умови на ріманів многовид, за яких стає можливим встановити коректність певного класу задач Діріхле для рівнянь з лапласіаном за мірою.

3. Побудовано нетривіальний приклад нескінченновимірного ріманового многовиду, що реалізує всі технічні умови, використані при побудові лапласіана в L^2-версії та доведенні коректності задачі Діріхле.

4. Досліджено перетворення задачі Діріхле спеціального типу при дифеоморфному відображенні між рімановими многовидами.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Авербух В. И.*, *Смолянов О. Г.*, *Фомин С. В.* Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах. I. Дифференцируемые меры // Издательство Московского университета. — 1971. — Т. 24. — С. 133–174. — (Тр. ММО).
2. *Авербух В. И.*, *Смолянов О. Г.*, *Фомин С. В.* Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах. II. Дифференциальные операторы и их преобразования Фурье // Издательство Московского университета. — 1972. — Т. 27. — С. 248–262. — (Тр. ММО).
3. *Беляев А. А.* Решение задачи Дирихле в полупространстве гильбертова пространства с помощью потенциалов // Успехи мат. наук. — 1982. — Т. 37, вып. 4(226). — С. 143–144.
4. *Березин И. С.*, *Жидков Н. П.* Методы вычислений т. 2. — М. : Гос. изд-во физико-математической лит-ры, 1959. — 620 с.
5. *Бирман М. Ш.*, *Соломяк М. З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — Л. : Изд-во Ленингр. гос. ун-та, 1980. — 264 с.
6. *Богачев В. И.* Дифференцируемые меры и исчисление Маллявэна. — М.-Ижевск : РХД, 2008. — 544 с.
7. *Богачев В. И.* О дифференцируемости мер по Скороходу // Теория вероятн. и её примен. — 1988. — Т. 38, вып. 2. — С. 349–354.
8. *Богданский Ю. В.* Банаховы многообразия с ограниченной структурой и формула Гаусса-Остроградского // Укр. мат. журн. — 2012. — Т. 64, № 10. — С. 1299–1313.

9. *Богданский Ю. В.* Граничный оператор следа в области гильбертова пространства и характеристическое свойство его ядра // Укр. мат. журн. — 2015. — Т. 67, № 11. — С. 1450–1460.

10. *Богданский Ю. В.* Лапласиан по мере на гильбертовом пространстве и задача Дирихле для уравнения Пуассона в L^2-версии // Укр. мат. журн. — 2011. — Т. 63, № 9. — С. 1169–1178.

11. *Богданский Ю. В.*, *Моравецкая Е. В.* Поверхностные меры на банаховых многообразиях с равномерной структурой // Укр. мат. журн. — 2017. — Т. 69, № 8. — С. 1030–1048.

12. *Богданский Ю. В.*, *Моравецкая Е. В.* Транзитивность поверхностных мер на банаховых многообразиях с равномерной структурой // Укр. мат. журн. — 2017. — Т. 69, № 10. — С. 1299–1309.

13. *Богданский Ю. В.*, *Потапенко А. Ю.* Лапласиан по мере на римановом многообразии и задача Дирихле. I // Укр. мат. журн. — 2016. — Т. 68, № 7. — С. 897–907.

14. *Богданский Ю. В.*, *Потапенко А. Ю.* Лапласиан по мере на римановом многообразии и задача Дирихле. II // Укр. мат. журн. — 2016. — Т. 68, № 11. — С. 1443–1449.

15. *Богданский Ю. В.*, *Санжаревский Я. Ю.* Задача Дирихле с лапласианом по мере на гильбертовом пространстве // Укр. мат. журн. — 2014. — Т. 66, № 6. — С. 733–739.

16. *Гохберг И. Ц.*, *Маркус А. С.* Две теоремы о растворе подпространств банахова пространства // Успехи мат. наук. — 1959. — Т. 14, № 5(89). — С. 135–140.

17. *Громол Д.*, *Клингенберг В.*, *Мейер В.* Риманова геометрия в целом. — М. : Мир, 1971. — 343 с.

18. *Далецкий Ю. Л.* Стохастическая дифференциальная геометрия // Успехи мат. наук. — 1983. — Т. 38, вып. 3(231). — С. 87–111.

19. *Далецкий Ю. Л.*, *Белопольская Я. И.* Стохастические уравнения и дифференциальная геометрия. — Киев : Выща школа, 1989. — 296 с.

20. *Далецкий Ю. Л.*, *Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М. : Наука, 1970. — 534 с.

21. *Данфорд Н.*, *Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Т. I: Общая теория. — М. : ИЛ, 1962. — 896 с.

22. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М. : Мир, 1972. — 739 с.

23. *Кобаяси Ш.*, *Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Том 1. — М. : Наука, 1981. — 344 с.

24. *Крейн М. Г.*, *Красносельский М. А.*, *Мильман Д. П.* О дефектных числах линейных операторов в банаховом пространстве и о некоторых геометрических вопросах // Сб. трудов ин-та матем. АН УССР. — 1948. — № 11. — С. 97–112.

25. *Ленг С.* Введение в теорию дифференцируемых многообразий. — М. : Мир, 1967. — 204 с.

26. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — М. : Наука, 1976. — 392 с.

27. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр 5. Риманова геометрия. — М. : Факториал, 1998. — 496 с.

28. *Потапенко А. Ю.* Бесконечномерные римановы многообразия с равномерной структурой. Лапласиан по мере и задача Дирихле // Матеріали конференції XIV Всеукраїнська науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених “Теоретичні і прикладні проблеми фізики, математики та інформатики”, том 2. — 05.2016. — С. 67–70.

29. *Потапенко А. Ю.* Краевая задача, ассоциированная с диффеоморфизмом между римановыми многообразиями // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2018. — № 1. — С. 132–140.

30. *Потапенко А. Ю.* Пример исследования корректности краевых задач на основе метода диффеоморфизмов // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2018. — № 3. — С. 91–97.

31. *Потапенко А. Ю.* Расширение класса корректных краевых задач на области в римановом многообразии методом диффеоморфизмов // Збірник наукових праць "Велес" за матеріалами III Міжнародної Конференції "Зимові наукові читання", 1 частина. — 01.2018. — С. 78–87.

32. *Потапенко О. Ю.* Нескінченновимірні ріманові многовиди з рівномірною структурою // Наукові вісті НТУУ "КПІ". — 2016. — Т. 108, № 4. — С. 73–79.

33. *Пугачёв О. В.* Емкости и поверхностные меры в локально выпуклых пространствах // Теория вероятн. и её примен. — 2008. — Т. 53, вып. 1. — С. 178–188.

34. *Скороход А. В.* Интегрирование в гильбертовом пространстве. — М. : Наука, 1975. — 230 с.

35. *Угланов А. В.* Поверхностные интегралы в банаховых пространствах // Мат. сб. — 1979. — Т. 110(152), № 2(10). — С. 189–217.

36. *Угланов А. В.* Поверхностные интегралы в пространствах Фреше // Мат. сб. — 1998. — Т. 189, № 11. — С. 139–157.

37. *Фомин С. В.* Дифференцируемые меры в линейных пространствах // Издательство Московского университета. — М., 1966. — С. 78–79. — (Тезисы кратких научн. сообщ. Международного конгресса математиков: секция 5).

38. *Фомин С. В.* Дифференцируемые меры в линейных пространствах // Успехи мат. наук. — 1966. — Т. 23, вып. 1(139). — С. 221–222.

39. *Фомин С. В.* О некоторых новых проблемах и результатах в нелинейном функциональном анализе // Вестник МГУ. — 1970. — № 2. — С. 57–65.

40. *Фомин С. В.* Обобщенные функции бесконечного числа переменных и их преобразования Фурье // Успехи мат. наук. — 1968. — Т. 23, вып. 2(140). — С. 215–216.

41. *Фролов Н. Н.* К задаче Дирихле в гильбертовом пространстве // сб.Теория вероятностей и матем.статистика, Киев. — 1970. — Вып. 3. — С. 200–210.

42. *Фролов Н. Н.* О задаче Дирихле для эллиптического оператора в цилиндрической области гильбертова пространства // Матем. сб. — 1973. — Т. 92(134), № 3(11). — С. 423–438.

43. *Фролов Н. Н.* Первая краевая задача для бесконечномерного линейного дифференциального оператора произвольного порядка // Сиб. матем. ж. — 1978. — Т. 19, № 4. — С. 929–941.

44. *Фролов Н. Н.* Теоремы вложения для функций счетного числа переменных и их приложения к задаче Дирихле // Докл. АН СССР. — 1972. — Т. 203, № 1. — С. 39–42.

45. *Хренников А. Ю.* Задача Дирихле в банаховом пространстве // Мат. заметки. — 1983. — Т. 34, вып. 4. — С. 629–636.

46. *Bogachev V. I.* Smooth measures, the Malliavin calculus and approximation in infinite dimensional spaces // Acta Univ. Carolinae. Math. et Phys. — 1990. — Vol. 31, issue 2. — P. 9–23.

47. *Bogachev V. I.*, *Röckner M.*, *Wang F.-Y.* Elliptic equations for invariant measures on finite and infinite dimensional manifolds // J. Math. Pures Appl. — 2001. — Vol. 80. — P. 177–221.

48. *Bogachev V. I.*, *Röckner M.*, *Wang F.-Y.* Invariant implies Gibbsian: some new results // Comm. Math. Phys. — 2004. — Vol. 248. — P. 335–355.

49. *Bogachev V. I.*, *Röckner M.*, *Zhang T. S.* Existence of invariant measures for diffusions with singular drifts // Appl. Math. Optim. — 2000. — Vol. 41. — P. 87–109.

50. *Chavel I.* Eigenvalues in Riemannian Geometry. — N.Y. : Elsevier Science, 1984. — 362 p. — (Pure and Applied Mathematics).

51. *Doob J. L.* A probability approach to the heat equation // Trans. Amer. Math. Soc. — 1955. — Vol. 80, no. 1. — P. 216–280.

52. *Gross L.* Potential theory on Hilbert space // J. Funct. Anal. — 1967. — Vol. 1. — P. 123–181.

53. *Li X.-D.* Perelman's W-entropy for the Fokker–Planck equation over complete Riemannian manifolds // Bulletin des Sci. Math. — 2011. — Vol. 135, 6–7. — P. 871–882.

54. *Newburgh J. D.* A topology for closed operators // Ann. Math. — 1951. — Vol. 53, no. 2. — P. 250–255.

55. *Potapenko O. Yu.* Diffeomorphism-associated boundary value problem on a Riemannian manifold // Book of abstracts of the 4th International Conference on memory of corresponding member of National Academy of Ukraine Valery Sergeevich Melnik. — 04/2018. — P. 58.

56. *Ralchenko K. V.*, *Shevchenko G. M.* Existence and uniqueness of mild solution to fractional stochastic heat equation // Modern Stochastics: Theory and Applications. — 2019. — Vol. 6, issue 1. — P. 57–79.

57. *Smolyanov O. G.*, *Weizsaecker H.* Differentiable families of measures // Journ. of Func. Anal. — 1988. — Vol. 118. — P. 454–476.

58. *Smolyanov O. G.*, *Weizsaecker H.* Smooth probability measures and associated differential operators // Inf. Dim. Anal., Quan. Probab. and Rel. Topics. — 1999. — Vol. 2, no. 1. — P. 51–78.

59. *Uglanov A. V.* Integration on infinite-dimensional surfaces and its applications. — Dordrecht : Kluwer Acad. Publ., 2000. — 262 p.

60. *Zhang X.* Variational approximation for Fokker–Planck equation on Riemannian manifold // Prob. Theory and Rel. Fields. — 2007. — Vol. 137, issue 3–4. — P. 519–539.

ДОДАТОК А. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ ТА ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

За результатами дисертаційної роботи опубліковано п’ять наукових статей у фахових виданнях (дві з яких опубліковано у журналі, який індексується наукометричними базами Scopus та Web of Science) та три роботи у матеріалах наукових конференцій, дві з яких є міжнародними.

1. *Богданский Ю. В., Потапенко А. Ю.* Лапласиан по мере на римановом многообразии и задача Дирихле. I // *Укр. мат. журн.* — 2016. — Т. 68, № 7. — С. 897–907.

2. *Богданский Ю. В., Потапенко А. Ю.* Лапласиан по мере на римановом многообразии и задача Дирихле. II // *Укр. мат. журн.* — 2016. — Т. 68, № 11. — С. 1443–1449.

3. *Потапенко О. Ю.* Нескінченновимірні ріманові многовиди з рівномірною структурою // *Наукові вісті НТУУ “КПІ”.* — 2016. — Т. 108, № 4. — С. 73–79.

4. *Потапенко А. Ю.* Краевая задача, ассоциированная с диффеоморфизмом между римановыми многообразиями // *Системні дослідження та інформаційні технології.* — 2018. — № 1. — С. 132–140.

5. *Потапенко А. Ю.* Пример исследования корректности краевых задач на основе метода диффеоморфизмов // *Системні дослідження та інформаційні технології.* — 2018. — № 3. — С. 91–97.

6. *Потапенко А. Ю.* Бесконечномерные римановы многообразия с равномерной структурой. Лапласиан по мере и задача Дирихле // Матеріали конференції XIV Всеукраїнська науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених “Теоретичні

і прикладні проблеми фізики, математики та інформатики”, том 2. — 05.2016. — С. 67–70.

7. *Потапенко А. Ю.* Расширение класса корректных краевых задач на области в римановом многообразии методом диффеоморфизмов // Збірник наукових праць “Велес” за матеріалами III Міжнародної Конференції “Зимові наукові читання”, 1 частина. — 01.2018. — С. 78–87.

8. *Potapenko O. Yu.* Diffeomorphism-associated boundary value problem on a Riemannian manifold // Book of abstracts of the 4th International Conference on memory of corresponding member of National Academy of Ukraine Valery Sergeevich Melnik. — 2018. — P. 58.